ACTA PHYSICA AUSTRIACA

UNTER MITWIRKUNG DER

ÖSTERREICHISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN VON

FRITZ REGLER UND HANS THIRRING
WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG

PAUL URBAN
GRAZ

13. BAND 1. HEFT

MIT 39 ABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM JANUAR 1960)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1960

Acta Phys. Austr.

Die **Acta Physica** erscheinen zwanglos nach Maßgabe der einlaufenden Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 400 bis 500 Seiten vereinigt werden. Arbeiten können in den Sprachen der internationalen Kongresse erscheinen.

Manuskripte sind entweder an die Schriftleitung der „Acta Physica Austriaca", Prof. Dr. PAUL URBAN, Graz, Universitätsplatz 5, oder an den Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5, zu richten; **alle geschäftlichen Mitteilungen** an den Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5, Tel. 63 96 14 Serie Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 100 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 100 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Allgemeine Richtlinien für die Abfassung von Beiträgen: Die Arbeit soll klar und verständlich geschrieben sein. Es ist Rücksicht auf jene Leser zu nehmen, die nicht mit demselben Problem vertraut sind. Auch ohne übermäßige und nicht verantwortbare Breite der Darstellung kann häufig ein eingefügter kleiner Satz dem Leser eine Stunde Nachdenken ersparen. Jede Niederschrift soll ein Ringen um das richtige Wort an der richtigen Stelle sein. Die Herausgeber erachten es als ihre Pflicht, Abhandlungen, die nach ihrem Dafürhalten den üblicherweise zu stellenden Anforderungen in dieser Hinsicht nicht voll entsprechen, zur Umarbeitung zurückzusenden.

Umfang: Obere Grenze etwa ein Druckbogen; längere Abhandlungen sind zu unterteilen.

Äußere Form: Maschinenschrift; einseitig beschriebene, fortlaufend bezifferte Blätter, linksseitig mit breitem freiem Rand.

Titelkopf: Titel der Arbeit (soll bereits unmißverständlich kennzeichnend für den behandelten Gegenstand sein). Darunter der Name des Verfassers mit ausgeschriebenem Vornamen. Darunter Angabe des Institutes, aus dem die Arbeit stammt, oder Privatanschrift des Verfassers; darunter „Mit ... Abbildungen".

Zusammenfassungen: Der Abhandlung vorangestellt wird eine zusammenfassende Übersicht in Kleindruck. Sie dient als einführender erster Überblick für den Leser und als Vorlage für die Referenten der Referatenblätter. Die Übersicht soll trotz gedrängter Darstellung alles enthalten, was der Verfasser an seiner Arbeit in bezug auf Problemstellung, Methodik und Ergebnisse für unerläßlich zu ihrer Beurteilung hält. Zu einer Beurteilung auch durch den Nichtfachmann!

Tabellen: Die Übersichtlichkeit einer Tabelle und damit das Erreichen ihres Zweckes kann sehr gefördert werden durch Sorgfalt in der Wahl der Überschriften sowohl für die Tabelle als Ganzes als für die einzelnen Zeilen und Kolonnen. Die gewählten Einheiten müssen klar ersichtlich, die Abkürzungen verständlich sein.

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

13. Band/1. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Krzywoblocki, M. Z. v. and **J. Nutant.** On the Similarity Rule in Magneto-Gas-Dynamics 1

Dallaporta, N. Some Aspects of the Problem of the Heavy Unstable Particles . 19

Bergmann, O. Versuch einer endlichen Theorie des Elektrons 33

Pottsepp, L. and **M. Z. v. Krzywoblocki.** On the Application of the Stability Theory of Differential Systems to the Stability of a Missile 48

Pucker, N. Zur Brennfleckverschiebung eines paraxialen Ionenstrahles unter Berücksichtigung der Raumladungseinflüsse im Linsenbereich 65

Kratky, O., G. Porod und **Z. Skala.** Verschmierung und Entschmierung bei Röntgen-Kleinwinkeldiagrammen 76

Power, G. and **H. L. W. Jackson.** On Problems Associated with Two-dimensional Fields in Homogeneous Anisotropic Media 129

Flamm, L. ADOLF GUSTAV SMEKAL † 140

Berichtigung und Nachtrag 144

Buchbesprechungen 147

On the Similarity Rule in Magneto-Gas-Dynamics

By

M. Z. v. Krzywoblocki and **J. Nutant**

University of Illinois, Urbana, Ill., U.S.A.

With 1 Figure

(*Received January 27, 1959*)

Summary

A diabatic flow is considered to be a flow of an inviscid, non-heat conducting fluid with heat addition by means of sources, i. e., injection of heat. If, in addition, the flow takes place in an electro-magnetic field, the sources of heat may be referred additionally to the Joule heat. This case is considered in the present paper. The governing fundamental equations are: the first law of thermodynamics, equation of motion, pressure-density-entropy relation, the equation of energy, MAXWELL's equations and OHM's law. The two-dimensional equations of the velocity potential and of the stream-function are transformed into the hodograph plane. Assuming a simplified pressure-density relation the authors derive a similarity rule in the flow in question. This is applied to some particular problems. The technique used in the present paper was developed by the author and two of his followers in one of their previous papers [1].

1. Fundamental Assumptions and Equations

The diabatic flow is thought to be a flow of a perfect, inviscid, non-heat conducting gas, obeying the law of a perfect gas, with heat addition by means of sources distributed in the flow domain. Consider steady state flow in an electro-magnetic field; the governing laws of such a diabatic flow are the first law of thermodynamics for a perfect gas, Newton's law (conservation of mass), generalized BERNOULLI equation (conservation of energy) and the pressure-density-entropy relation:

$$dQ = T\,dS = c_v\,dT + p\,d(\varrho^{-1}) = c_p\,dT - \varrho^{-1}\,dp; \tag{1.1}$$

$$\varrho\,q\,dq = \varrho\,d\left(\frac{1}{2}\,q^2\right) = dF_e - dp; \quad \text{(no external mechanical forces)}; \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div}(\varrho\,\vec{q}) = 0; \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{2}\,q^2 + \gamma(\gamma-1)^{-1}\,p\,\varrho^{-1} - Q - \int \varrho^{-1}\,dF_e = H(\psi); \tag{1.4}$$

$$p\,p_0^{-1} = (\varrho\,\varrho_0^{-1})^{\gamma} \exp\left[(S - S_0)\,c_v^{-1}\right]; \qquad p = R\,\varrho\,T; \tag{1.5}$$

or:

$$p = C\,\varrho^{\gamma} \exp\left(S\,c_v^{-1}\right); \qquad p = p(\varrho, S); \tag{1.6}$$

where:

Q — the total amount of heat added to a particle from the initial point (at rest) up to the given point on the streamline $\psi = \text{const.}$; $dQ = d\bar{Q} + j^2(\varrho\,\sigma\,q)^{-1}\,ds$;

S — entropy;

$\bar{Q}$ — all the heat injected from outside except the Joule heat;

$j^2(\varrho\,\sigma)^{-1}$ — rate of Joule heat;

$\vec{j}$ — current density vector (magnitude j);

σ — electrical conductivity of the fluid;

F_e — electromagnetic force potential, which force is equal to:

$$\varrho_e \vec{E} + \mu_e \vec{j} \times \vec{H};$$

$\vec{H}$ = magnetic field vector (magnitude H);

ϱ_e — the excess electric charge;

$\vec{E}$ — the electrical field strength;

μ_e — the magnetic permeability of the fluid,

other notations being conventional.

Moreover, one has to consider the MAXWELL equations and the Ohm law; these are:

$$\partial \varepsilon \vec{E}/\partial t + 4\pi \vec{j} = \operatorname{curl} \vec{H}; \qquad \operatorname{curl} \vec{E} = -\frac{\partial \mu_e \vec{H}}{\partial t}; \tag{1.7}$$

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \mu_e \vec{q} \times \vec{H}) + \varrho_e \vec{q}; \tag{1.8}$$

$$\operatorname{div} \vec{j} + \partial \varrho_e/\partial t = 0, \tag{1.9}$$

where the used symbols denote:

ε — the dielectric constant.

For the simplicity sake we may assume that $\varrho_e = 0$, that the flow conditions are steady, and that the fluid is nonmagnetic, i.e., that it has the same permeability as empty space; thus the permeability is taken to be equal to 1, i.e., $\mu_e = 1$. Combining equations (1.1), (1.2) and (1.8) furnishes the expression:

$$d\left(\frac{1}{2} q^2 + c_p T\right) - q^{-1} \varrho^{-1} (\vec{E} \cdot \vec{j})\, ds - d\bar{Q} = 0, \tag{1.10}$$

valid along a streamline $\psi = \text{const.}$

The sum

$$\int q^{-1} \varrho^{-1} (\vec{E} \cdot \vec{j})\, ds + \int d\bar{Q} = I, \tag{1.11}$$

will be denoted by the symbol I.

Assume that the incoming flow at infinity is steady, uniform, and irrotational, having the same values of $(q_i, p_i, \varrho_i, T_i, Q_i = 0)$, on all the streamlines. This implies that there is the universal constant on

the right hand side of BERNOULLI's equation in this region of the flow domain. In the vicinity of the body there is an electro-magnetic field and it takes place heat addition to the particles of the gas. Here the function $H = H(\psi)$ in the BERNOULLI equation varies from streamline to streamline and the flow is rotational. Far behind the body, there are distributed "heat sinks" in the flow, whose action is such that the flow at infinity returns to steady, uniform, irrotational flow without any heat addition or subtraction. These assumptions enable us to write:

(a) in the uniform incoming flow

$$\frac{1}{2} q_i^2 + \gamma(\gamma - 1)^{-1} p_i \varrho_i^{-1} = \text{const.}; \tag{1.12}$$

(b) in the vicinity of the body:

$$\frac{1}{2} q^2 + \gamma(\gamma - 1)^{-1} p \varrho^{-1} - I = H(\psi); \tag{1.13}$$

$$H(\psi) = \frac{1}{2} q_m^2 - I_m = \gamma(\gamma - 1)^{-1} p_0 \varrho_0^{-1} - I_0, \tag{1.14}$$

where the subscript „m" denotes the conditions at $p = T = 0$, $q = q_{max}$, and the subscript zero denotes the conditions at rest. The symbols I_m, I_0, I, in each case refer to the total amount of energy, added (or subtracted) to a particle along a streamline due to the action of the force $\mu_e \vec{j} \times \vec{H}$ on the particle; this total amount of energy is measured along a streamline from the point in which the force $\mu_e \vec{j} \times \vec{H}$ begins to act up to the point in question (marked by the subscript „m" or „O" or no subscript).

The velocity of sound is always calculated from the expression $c^2 = (\partial p / \partial \varrho)_{S = const.}$ Assume a steady two-dimensional flow; the stream function satisfies the continuity equation and is defined by the relations:

$$\varrho_0^{-1} \varrho u = \psi_{,y}; \qquad -\varrho_0^{-1} \varrho v = -\psi_{,x}; \qquad q^2 = u^2 + v^2. \tag{1.15}$$

Differentiating the third relation in equation (1.15) first with respect to x and multiplying the result by $(-v)$, then with respect to y and multiplying the result by u, using the first two of equations (1.15) and adding the products furnish the result:

$$u^2 \psi_{,yy} - 2\, u\, v\, \psi_{,xy} + v^2 \psi_{,xx} = \varrho_0^{-1} [q^2(u \varrho_{,y} - v \varrho_{,x}) + \\ + \varrho\, q(u q_{,y} - v q_{,x})]. \tag{1.16}$$

Eliminating T in the last equation (1.1) by means of the equation of state, eliminating $p_{,i} (= p_{,x}; = p_{,y})$ in the same equation by means of equations of motion with $c^2 = \gamma R T$ and $\omega = (v_{,x} - u_{,y})$ denoting the vorticity, transforms equation (1.16) into the form:

$$(c^2 - u^2) \psi_{,xx} - 2\, u\, v\, \psi_{,xy} + (c^2 - v^2) \psi_{,yy} = \\ = \varrho_0^{-1} \varrho [(\gamma - 1)(v Q_{,x} - u Q_{,y}) - \omega (c^2 - q^2) + \varrho^{-1}(u F_{e,y} - v F_{e,x})]. \tag{1.17}$$

Similarly, one obtains equation for the potential function:

$$u = \varphi_{,x} + g; \qquad v = \varphi_{,y} + g; \qquad g_{,x} - g_{,y} = \omega(x, y); \qquad g = g(x, y), \tag{1.18}$$

with the condition that for an irrotational flow the trivial solution $g = 0$ should be taken. A procedure similar to that in the classical case where $(\omega = Q = Q_0 = 0)$ and to the one explained above gives the form of the potential equation:

$$(c^2 - u^2)(\varphi_{,xx} + g_{,x}) - u\,v\,(2\varphi_{,xy} + g_{,x} + g_{,y}) + (c^2 - v^2)(\varphi_{,yy} + g_{,y}) =$$
$$= -(u F_{e,x} + v F_{e,y})\,\varrho^{-1} + (\gamma - 1)\,\overline{\overline{Q}}; \qquad \overline{\overline{Q}} = D\,Q/D\,t = u\,Q_{,x} + v\,Q_{,y}. \tag{1.19}$$

2. Hodograph Transformation

Let us apply the transformations of coordinates:

$$\{x, y\} \longleftrightarrow \{u, v\} \longleftrightarrow \{q, \theta\}, \qquad \text{with}$$

$$J_1 = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}; \qquad J_1 = q^{-1}\frac{\partial(x, y)}{\partial(q, \theta)}, \tag{2.1}$$

denoting the Jacobian of the transformation. The generalized Cauchy-Riemann equations in the hodograph plane, $\{q, \theta\}$, are of the form:

$$\varphi_{,q} = a\,\psi_{,\theta} + b\,\psi_{,q}; \qquad \varphi_{,\theta} = \bar{c}\,\psi_{,\theta} + d\,\psi_{,q} + e; \tag{2.2}$$

$$a = \varrho_0(\varrho\,q)^{-1}[q - g(\sin\theta + \cos\theta)] \cdot$$
$$\cdot [Q_{,q}(\gamma - 1)\,c^{-2} + q^{-1}(M^2 - 1) - (c^2\varrho)^{-1}F_{e,q}]; \tag{2.3}$$

$$b = \varrho_0(\varrho\,q)^{-1}\{g(\sin\theta - \cos\theta) - c^{-2}[q - g(\sin\theta + \cos\theta)] \cdot$$
$$\cdot [(\gamma - 1)\,Q_{,\theta} - \varrho^{-1}F_{e,\theta}]\}; \tag{2.4}$$

$$\bar{c} = \varrho_0(\varrho\,q)^{-1}\,g(\sin\theta - \cos\theta); \qquad M^2 = q^2 c^{-2}; \tag{2.5}$$

$$d = \varrho_0\,\varrho^{-1}[q - g(\sin\theta + \cos\theta)]; \tag{2.6}$$

$$e = q\,J_1\,\omega\,[q - g(\sin\theta + \cos\theta)]. \tag{2.7}$$

This leads to the stream function equation in the hodograph plane:

$$a\,\psi_{,\theta\theta} + (b - \bar{c})\,\psi_{,\theta q} - d\,\psi_{,qq} + (a_{,\theta} - \bar{c}_{,q})\,\psi_{,\theta} + (b_{,\theta} - d_{,q})\,\psi_{,q} - e_{,q} = 0. \tag{2.8}$$

3. Incompressible Rotational Flow

The procedure, explained above in Sections 1. and 2., can be applied to an incompressible flow. From equations of continuity and rotationality one obtains (with primes denoting the functions and coordinates in the incompressible flow domain):

$$u'_{,x'} + v'_{,y'} = 0; \qquad u' = \psi'_{,y'}; \qquad v' = -\psi'_{,x'};$$
$$v'_{,x'} - u'_{,y'} = \omega' = g'_{,x'} - g'_{,y'}; \tag{3.1}$$

$$u' = \varphi'_{,x'} + g'; \qquad v' = \varphi'_{,y'} + g'; \qquad \varphi'_{,x'x'} + g'_{,x'} + \varphi'_{,y'y'} + g'_{,y'} = 0; \tag{3.2}$$

$$\psi'_{,x'x'} + g'_{,x'} + \psi'_{,y'y'} - g'_{,y'} = 0. \tag{3.3}$$

The hodograph transformation technique, identical to that in the compressible flow domain, furnishes the results:

$$a'\,\psi'_{,\theta'\theta'} - d'\,\psi'_{,q'q'} + (a'_{,\theta'} - \bar{c}'_{,q'})\,\psi'_{,\theta'} + (b'_{,\theta'} - d'_{,q'})\,\psi'_{,q'} - e'_{,q'} = 0, \tag{3.4}$$

where:

$$a' = -\,q'^{-2}\,[q' - g'\,(\sin\theta' + \cos\theta')]; \tag{3.5}$$

$$b' = \bar{c}' = g'\,q'^{-1}(\sin\theta' - \cos\theta'); \tag{3.6}$$

$$d' = q' - g'(\sin\theta' + \cos\theta'); \tag{3.7}$$

$$e' = q'\,J_1'\,\omega'\,[q' - g'\,(\sin\theta' + \cos\theta')]; \qquad J_1' = q'^{-1}\,\frac{\partial(x', y')}{\partial(q', \theta')}. \tag{3.8}$$

4. Simplified Pressure-Density-Entropy Relation

Assume a simplified pressure-density-entropy relation in the form (C and $\bar{B}$ are constants):

$$p = C - \bar{B}\,\varrho^{-1} - \int \varrho\,T\,dS; \qquad T\,dS = dQ. \tag{4.1}$$

Introducing the differential dp into the momentum equation, $q\,dq + \varrho^{-1}(dp - dF_e) = 0$, furnishes the result:

$$\frac{1}{2}\,(q^2 - \bar{B}\,\varrho^{-2}) - \int dQ - \int \varrho^{-1}\,dF_e = H(\psi) = \frac{1}{2}\,(q^2 - \bar{B}\,\varrho^{-2}) - I. \tag{4.2}$$

The velocity of sound is calculated for a constant entropy ($dS = 0$), i.e.:

$$c^2 = (\partial p/\partial\varrho)_{S\,=\,const.} = \bar{B}\,\varrho^{-2}. \tag{4.3}$$

Equations (4.2) and (4.3) are combined to furnish the formula (with the subscript zero denoting the stagnation conditions):

$$c^2 = c_0^2 + q^2 - 2\,\bar{Q} - \int \varrho^{-1}\,dF_e =$$

$$= (c_0^2 + q^2)\,[1 - (2\,\bar{Q} + \int \varrho^{-1}\,dF_e)\,(c_0^2 + q^2)^{-1}]; \qquad \bar{Q} = \int dQ; \tag{4.4}$$

or:

$$c^2 = c_q^2\,c_g^2; \quad c_q = c_q(q) = (c_0^2 + q^2)^{1/2};$$

$$c_g^2 = 1 - \left[2\,\bar{Q} + \int \varrho^{-1}\,dF_e\right]\cdot (c_0^2 + q^2)^{-1}. \tag{4.5}$$

Other forms of these equations are:

$$c^2 = c_0^2 + q^2 - 2\,I = (c_0^2 + q^2)\,[1 - 2\,I\,(c_0^2 + q^2)^{-1}]; \tag{4.6}$$

or:

$$c^2 = c_q^2\,c_g^2; \qquad c_q^2 = c_q^2(q) = (c_0^2 + q^2); \qquad c_g^2 = 1 - 2\,I\,(c_0^2 + q^2)^{-1}. \tag{4.7}$$

5. Dimensionless Compressible Flow Equation

Introduce a new independent variable, λ, determined from the equation (with the use of eq. (4.4)):

$$d\lambda/dq = q^{-1}(1 - M^2)^{1/2} = c_0(q\,c_q)^{-1}\,N, \tag{5.1}$$

where the coefficient N, with $I = \left[\bar{Q} + \int \varrho^{-1}\,dF_e\right]$:

$$N = (1 - 2\,I\,c_0^{-2})^{1/2}\,[1 - 2\,I\,(c_0^2 + q^2)^{-1}]^{-1/2}, \tag{5.2}$$

for the values up to $q \approx 0.6 \div 0.7\,c_0$ may be assumed to be equal to unity. Since this procedure is equivalent to some kind of linearization, the terms in eq. (2.8) containing c^{-2} like the derivatives $c^{-2}Q_{,q}$ and $c^{-2}Q_{,\theta}$ etc., are assumed to be negligibly small. The usual assumptions of a linearization have to be generalized in the sense that the variations of the functions Q and F_e are small. Introducing the coordinate λ into eq. (2.8) furnishes the equation (5.3). In this procedure there appear the expressions with the assumption that $N \approx 1$.

$$\lambda_{,q} = c_0\,[q\,(c_0^2 + q^2)^{1/2}]^{-1};$$

$$\lambda_{,qq} = -\,c_0\,(1 + q^2\,c_q^{-2})\,(q^2\,c_q)^{-1};$$

$\lambda_{,qq}(\lambda_{,q})^{-2} = -\,(c_q^2 + q^2)\,(c_0\,c_q)^{-1} = -\,(c_0^2 + 2\,q^2)\,[c_0^2\,(1 + q^2\,c_0^{-2})^{1/2}]^{-1}$
≈ 1 since q^2 is relatively small in comparison with c_0^2 and may be neglected;

$$\psi_{,q} = \psi_{,\lambda}\,\lambda_{,q}; \qquad \psi_{,qq} = \psi_{,\lambda\lambda}(\lambda_{,q})^2 + \psi_{,\lambda}\,\lambda_{,qq}, \qquad \text{etc.}$$

Eq. (5.3) has the form:

$$a^0\psi_{,\theta\theta} - d^0\psi_{,\lambda\lambda} + (a^0{}_{,\theta} - b^0{}_{,\lambda})\,\psi_{,\theta} + (b^0{}_{,\theta} - d^0{}_{,\lambda} - a^0)\,\psi_{,\lambda} - e^0{}_{,\lambda} = 0, \tag{5.3}$$

where:

$$a^0 = -\,d^0 = -\,Z\,[1 - g\,q^{-1}\,(\sin\theta + \cos\theta)];\; Z = \varrho_0\,c_g\,c_0\,\bar{B}^{-1/2}; \tag{5.4}$$

$$b^0 = Z\,g\,q^{-1}\,(\sin\theta - \cos\theta)\,c_q\,c_0^{-1}; \qquad e^0 = e; \tag{5.5}$$

$$J_1 = c_0\,c_q^{-1}\,q^{-2}\,\partial(x, y)/\partial(\lambda, \theta). \tag{5.6}$$

The relation between the coordinates λ and q is given by (see Ref. [3, p. 72]):

$$\lambda = \lambda(q) = \ln\{C_3\,q\,[(c_0^2 + q^2)^{1/2} + c_0]^{-1}\}; \qquad C_3 = 2\,c_0, \tag{5.7}$$

with $C_3 = 2\,c_0$ denoting the arbitrary constant of integration assumed to be equal to $2\,c_0$, and:

$$q = (2\,C_3\,c_0 \exp\lambda)\,[C_3^2 - \exp(2\,\lambda)]^{-1}. \tag{5.8}$$

6. Dimensionless Incompressible Flow Equation

The procedure, applied in Section 5., is applied to the incompressible fluid stream function equation (3.4) with $\lambda' = \ln q' + \ln C_1$. The result is (with no heat addition and vorticity $\neq 0$):

$$a''\,\psi'_{,\theta'\theta'} - d''\,\psi'_{\lambda'\lambda'} + (a''_{,\theta'} - b''_{,\lambda'})\,\psi'_{\theta'} + (b''_{,\theta'} - d''_{,\lambda'} + d'')\cdot$$
$$\cdot\,\psi'_{,\lambda'} - e''_{,\lambda'} = 0, \tag{6.1}$$

where:

$$a'' = -d'' = -[1 - g' q'^{-1} (\sin\theta' + \cos\theta')]; \qquad b'' = b'; \qquad e'' = e'; \tag{6.2}$$

$$J_1' = q'^{-2}\, \partial(x, y)/\partial(\lambda', \theta'). \tag{6.3}$$

7. Correspondence Between the Compressible and Incompressible Flows

To establish a correspondence between the compressible and incompressible flows, we require that:

$$\lambda = \lambda'; \qquad \theta = \theta'; \qquad a^0 = A\, a''; \qquad e^0{}_{,\lambda} = A\, e''{}_{,\lambda'}; \qquad A = A(\lambda, \theta); \tag{7.1}$$

$$(a^0{}_{,\theta} - b^0{}_{,\lambda}) = A\,(a''{}_{,\theta'} - b''{}_{,\lambda'});$$
$$(a^0{}_{,\lambda} + b^0{}_{,\theta} - a^0) = A\,(a''{}_{,\lambda'} + b''{}_{,\theta'} - a''). \tag{7.2}$$

In th _ case, equation (5.3) transforms directly into equation (6.1). From the condition (7.2) one gets:

$$(a^0{}_{,\theta} - b^0{}_{,\lambda})\,(a''{}_{,\lambda} + b''{}_{,\theta} - a'') = (a''{}_{,\theta} - b''{}_{,\lambda})\,(a^0{}_{,\lambda} + b^0{}_{,\theta} - a^0). \tag{7.3}$$

Introducing into eq. (7.3) the relation $a^0 = A\, a''$, and ordering, gives a differential equation for A of the form:

$$A_{,\lambda}\,[a''\,(b''{}_{,\lambda} - a''{}_{,\theta})] + A_{,\theta}\,[a''\,(a''{}_{,\lambda} + b''{}_{,\theta} - a'')] +$$
$$+ A\,(a''{}_{,\theta}\, b''{}_{,\theta} + a''{}_{,\lambda}\, b''{}_{,\lambda} - a''\, b''{}_{,\lambda}) + b^0{}_{,\theta}\,(b''{}_{,\lambda} - a''{}_{,\theta}) -$$
$$- b^0{}_{,\lambda}\,(a''{}_{,\lambda} + b''{}_{,\theta} - a'') = 0, \tag{7.4}$$

which, if solved, would yield the function $A(\lambda, \theta)$. This inserted into the relation $a^0 = A\, a''$ would give the dependence of the vorticity functions g and g' upon each other, with all of the other magnitudes and functions playing the roles of parameters. Similarly, the values of A and g, inserted into the relation $e^0{}_{,\lambda} = A\, e''{}_{,\lambda}$ would yield a relation between the JACOBIANS J_1 and J_1', thus furnishing the transformation formulas for the coordinates from the $\{x, y\}$–plane to the $\{x', y'\}$–plane and vice versa.

In the case of a compressible fluid flow with no heat addition, no electro-magnetic phenomena and with the stagnation enthalpy being constant in the entire flow domain, the constant in the BERNOULLI equation is a universal constant and there is no vorticity. Hence the corresponding flow in the incompressible fluid flow domain must be irrotational. Since the value of the vorticity, ω, and consequently of the function g may be known, if the heat input distribution and the electro-magnetic phenomena are given, the above dependence of the functions g and g' gives the value of the function g' in terms of g. We may formulate the philosophy of the problem in the following manner: assume that in the compressible fluid flow domain the heat input distribution and the electro-magnetic phenomena are known and given; this implies that there is known the vorticity distribution in this domain depending upon the heat input distribution and the electro-magnetic

phenomena. Moreover, assume that all the characteristic functions and properties of the corresponding incompressible fluid flow are known, excluding the vorticity distribution, which will depend upon the vorticity pattern in the compressible fluid flow domain and should be calculated. Then one may calculate the characteristic functions and properties of the compressible fluid flow. In this correspondence between the incompressible and compressible flows, the incompressible flow must be rotational. Because there are no forces and no heat addition, it must stay rotational in the entire flow domain. The compressible flow is assumed to be irrotational in one area (incoming) and rotational in another (vicinity of the body). The correspondence between these two flows is limited to the vicinity of the body, which is sufficient for practical purposes.

In the case, a knowledge of the function Q and of the electromagnetic phenomena is not sufficient to find the value of ω, since the value of $h_0 = c_p T_0$ may be unknown, the procedure changes to the following: assume that all the characteristic functions and properties, including the vorticity, which now will not depend upon the vorticity in the compressible fluid flow domain, of an incompressible fluid flow are known; moreover, the heat input distribution and the electro-magnetic phenomena in the compressible fluid flow domain are known. Then one can calculate all the characteristic functions and properties of the corresponding compressible fluid flow, including vorticity, i.e., the function g as a function of g'.

8. Pressure Coefficients

From the relation $\lambda' = \lambda$, and with the use of the first equation (4.4), one obtains:

$$q' = 2\,c_0\,q\,[(q^2 + c_0^2)^{1/2} + c_0]^{-1} = \\ = 2\,c_0\,q\,[(c^2 + 2\,I)^{1/2} + (c^2 - q^2 + 2\,I)^{1/2}]^{-1}, \tag{8.1}$$

where

$$I = \int (q\,\varrho)^{-1}\,\vec{E}\cdot\vec{j}\,ds + \int d\bar{Q} = \int dQ + \int \varrho^{-1}\,dF_e; \tag{8.1a}$$

or:

$$q' = 2\,c_0\,M\,[(1 - M^2 + 2\,I\,c^{-2})^{1/2} + (1 + 2\,I\,c^{-2})^{1/2}]^{-1}. \tag{8.2}$$

To find the correspondence between the pressure coefficients c_p and c_p' we shall follow the procedure given in Ref. [3, (p. 73)]:

$$c_p = 2\,(p - p_1)\,(\varrho_1\,q_1^2)^{-1}; \qquad c_p' = 2\,(p' - p_1')\,(\varrho_1'\,q_1'^2)^{-1}, \tag{8.3}$$

with the subscript 1 denoting the values at infinity. But:

$$p - p_1 = \bar{B}\,(\varrho_1^{-1} - \varrho^{-1}) + \int (\varrho_1\,dQ_1 - \varrho\,dQ); \qquad Q_1 = 0, \tag{8.4}$$

which, when inserted into equation (8.3), furnishes the formula:

$$c_p = 2\,\bar{B}\,(1 - \varrho_1\,\varrho^{-1})\,(\varrho_1^2\,q_1^2)^{-1} - 2\left(\int \varrho\,dQ\right)(\varrho_1\,q_1^2)^{-1}, \tag{8.5}$$

or with the use of equation (4.3):

$$c_p = 2\,{c_1}^2\,(1 - \varrho_1\,\varrho^{-1})\,{q_1}^{-2} - 2\left(\int \varrho\,dQ\right)(\varrho_1\,{q_1}^2)^{-1}, \tag{8.6}$$

and

$$c_p = 2\,{M_1}^{-2}\,(1 - \varrho_1\,\varrho^{-1}) - 2\left(\int \varrho\,dQ\right){c_1}^{-2}\,{\varrho_1}^{-1}\,{M_1}^{-2}. \tag{8.7}$$

For an incompressible flow, the analogous reasoning gives:

$$c_p' = 1 - q'^2\,{q_1}'^{-2}. \tag{8.8}$$

Let:

$$m = M\,\{(1 - M^2)^{1/2}\,\{1 + 2\,I\,[c^2\,(1 - M^2)]^{-1}\}^{1/2} + (1 + 2\,I\,c^{-2})^{1/2}\}^{-1}, \tag{8.9}$$

and

$$M = 2\,m\,(1 + m^2)^{-1}\,(1 + 2\,I\,c^{-2})^{1/2}; \tag{8.10}$$

$$(1 - M^2)^{1/2} = \{[(1 - m^2)^2 - 4\,m^2\,(2\,I\,c^{-2})]\,(1 + m^2)^{-2}\}^{1/2}, \tag{8.11}$$

then equations (8.2) and (8.8) take the forms:

$$q' = 2\,c_0\,m; \qquad c_p' = 1 - m^2\,{m_1}^{-2}. \tag{8.12}$$

From eq. (4.4) one has:

$$1 - M^2 = {c_0}^2\,c^{-2} - 2\,I\,c^{-2};$$

$$c_0\,c^{-1} = (1 - M^2)^{1/2}\,[1 + 2\,I\,c^{-2}\,(1 - M^2)^{-1}]^{1/2}, \tag{8.13}$$

which, when inserted into the equality $\varrho = \bar{B}^{1/2}\,{c_0}^{-1}\,c_0\,c^{-1}$, gives the values ϱ and ϱ_1 in terms of the Mach numbers. After all the manipulations one gets:

$$\varrho_1\,\varrho^{-1} = (1 - {m_1}^2)\,(1 + m^2)\,(1 + 2\,I_1\,{c_1}^{-2})^{1/2} \cdot$$
$$\cdot\,[(1 - m^2)\,(1 + {m_1}^2)\,(1 + 2\,I\,c^{-2})^{1/2}]^{-1}. \tag{8.14}$$

Eq. (8.13) when inserted into eq. (8.7) furnishes:

$$c_p = 2\,{M_1}^{-2}\,[({m_1}^2 - m^2)\,(\bar{R} + \bar{R}_1) + (1 - {m_1}^2\,m^2)\,(\bar{R} - \bar{R}_1)]\,[(1 + {m_1}^2) \cdot$$
$$\cdot\,(1 - m^2)\,\bar{R}]^{-1} - 2\left(\int \varrho\,dQ\right){c_1}^{-2}\,(\varrho_1\,{M_1}^2)^{-1}, \tag{8.15}$$

with:

$$\bar{R} = (1 + 2\,I\,c^{-2})^{1/2}; \qquad \bar{R}_1 = (1 + 2\,I_1\,{c_1}^{-2})^{1/2}. \tag{8.16}$$

Inserting the second equation (8.11) and equation (8.10) into Eq. (8.15), after all the manipulations (using also eq. (8.11)) supplies the sought formula:

$$c_p = [c_p' + ({m_1}^{-2} - m^2)\,(\bar{R} - \bar{R}_1)\,(\bar{R} + \bar{R}_1)^{-1}] \cdot$$
$$\cdot\left\{\left[({\bar{R}_1}^2 - {M_1}^2)^{1/2} + \frac{1}{2}\,M_1\,m_1\,{c_p}'\right][2\,\bar{R}_1\,\bar{R}\,(\bar{R} + \bar{R}_1)^{-1}]\right\}^{-1} -$$
$$- 2\left(\int \varrho\,dQ\right){c_1}^{-2}\,(\varrho_1\,{M_1}^2)^{-1}. \tag{8.17}$$

For $Q = 0$ and $\bar{R} = \bar{R}_1 = 1$, equation (8.17) reduces to the equation (63) in [3, p. 74], i.e., the equation in an isentropic flow. The value $\bar{R}_1$ refers to the incoming flow in the compressible fluid flow domain.

We shall investigate the behaviour of the expression:

$$\Gamma = [(m_1^{-2} - m^2)(\bar{R} - \bar{R}_1)(\bar{R} + \bar{R}_1)^{-1}] \cdot \cdot \left\{ \left[(\bar{R}_1^2 - M_1^2)^{1/2} + \frac{1}{2} M_1 m_1 c_p' \right] [2 \bar{R}_1 \bar{R} (\bar{R} + \bar{R}_1)^{-1}] \right\}^{-1}, \quad (8.18)$$

for $m_1 \to 0$, i.e., for the case of an incompressible fluid flow. Using eq. (8.12) we can eliminate m^2 and represent the function Γ in the form:

$$\Gamma = P - Q; \qquad Q = \bar{R}^{-1} P; \quad (8.19)$$

$$P = (m_1^{-2} - m_1^2 + m_1^2 c_p') \cdot \left\{ 2 \left[(1 - M_1^2)^{1/2} + \frac{1}{2} m_1 M_1 c_p' \right] \right\}^{-1} =$$

$$= (1 + m_1^2)(1 - m_1^4 + m_1^4 c_p')(2 m_1^2 - 2 m_1^4 + 2 m_1^4 c_p')^{-1}. \quad (8.20)$$

One can easily verify that:

$$\lim_{m_1 \to 0} \Gamma = \lim_{m_1 \to 0} (P - Q) = \infty - \infty. \quad (8.21)$$

With $P = p^{-1}, Q = q^{-1}$, one obtains:

$$\lim_{m_1 \to 0} (p^{-1} - q^{-1}) = \lim_{m_1 \to 0} (q - p)(p q)^{-1} = 0/0. \quad (8.22)$$

Using l' Hospital rule and the differentiation with respect to m_1 furnishes:

$$\Gamma_1 = (dq - dp)(p\,dq + q\,dp)^{-1}; \quad (8.23)$$

$$\Gamma_2 = (d^2q - d^2p)(p\,d^2q + 2\,dp\,dq + q\,d^2p)^{-1}; \quad (8.24)$$

$$\Gamma_3 = (d^3q - d^3p)(p\,d^3q + 3\,d^2p\,dq + 3\,dp\,d^2q + q\,d^3p)^{-1}; \quad (8.25)$$

$$\Gamma_4 = (d^4q - d^4p)(p\,d^4q + 4\,dp\,d^3q + 6\,d^2p\,d^2q + 4\,d^3p\,dq + q\,d^4p)^{-1}; \quad (8.26)$$

$$\lim_{m_1 \to 0} p = \lim_{m_1 \to 0} dp = 0; \qquad \lim_{m_1 \to 0} d^2p = 4; \quad (8.27)$$

$$\lim_{m_1 \to 0} d^2q = 4 \text{ with } \bar{R} \to 1 \text{ as } m_1 \to 0;$$

$$\lim_{m_1 \to 0} \Gamma_1 = 0/0; \qquad \lim_{m_1 \to 0} \Gamma_2 = 0/0, \quad (8.28)$$

with $d^2q - d^2p = (\bar{R} - 1)\,d^2p = 0$ as $m_1 \to 0$; $\qquad \lim_{m_1 \to 0} \Gamma_3 = 0/0;$ (8.29)

$$\lim_{m_1 \to 0} \Gamma_4 = 0/96 = 0. \quad (8.30)$$

This means that eq. (8.17) can be represented in the form:

$$c_p = c_p' \left\{ \left[(\bar{R}_1^2 - M_1^2)^{1/2} + \frac{1}{2} M_1 m_1 c_p' \right] [2 \bar{R}_1 \bar{R} (\bar{R} + \bar{R}_1)^{-1}] \right\}^{-1} - \cdot$$

$$- 2 \left(\int \varrho\, dQ \right) (M_1^2 c_1^2 \varrho_1)^{-1}. \quad (8.31)$$

When there is no electro-magnetic field and no heat addition, i.e., $\bar{R}_1 = \bar{R} = 1$, $dQ = 0$, then eq. (8.31) reduces to the Kármán-Tsien formula, and this to Prandtl-Glauert form.

9. Application

Equation (8.31) was applied to the calculation of the pressure coefficient c_p for the following values:

$$d\bar{Q} = 0;$$
$$\varrho \approx \varrho_1 = \text{const.};$$
$$c^2 = c_1^2 - 2I;$$
$$q \approx q_1;$$
$$\vec{E} = \vec{q}_1 \times \vec{H}. \tag{9.1}$$

Fig. 1 shows the results compared with the values of c_p for an isentropic fluid flow.

The flow is everywhere perpendicular to the magnetic field. The calculations show that the Joule heat (second term in eq. 8.31) is very significant, especially at low free-stream Mach numbers. The most influential parameter in the electro-magnetic part seems to be $\vec{H}$.

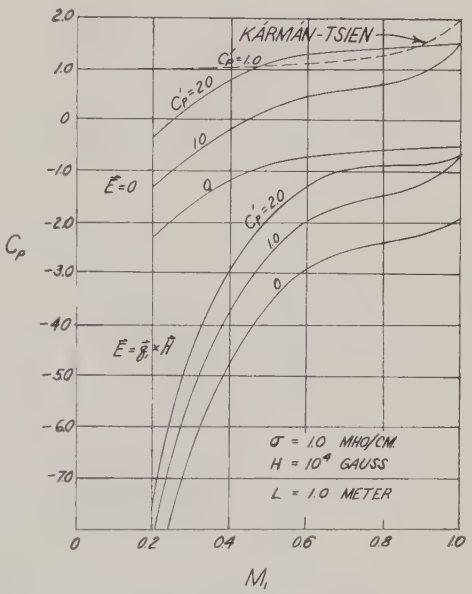

Fig. 1. C_p as a function of M_1

Appendix

A Brief Review of Magnetohydrodynamics

Below, we shall review very briefly some papers dealing with magnetohydrodynamics. The review is ordered in a chronological sequence and the list of references in an alphabetical one. The reader is warned that only some papers are discussed and that definitely the review cannot be considered as containing all the important references.

A 1. Fundamentals

Panos, Pai (1955) and Elsasser derive the basic equations of magneto-hydrodynamics; in Chester's paper the classical Stokes flow is modified by a magnetic field interacting with the flow. Rose studies the structure of a plane, steady hydromagnetic shock from the point of view of one-fluid continuum theory. The fundamentals of magnetohydrodynamics are presented briefly in the book by Cowling. Kulikowski derives a certain class of exact solutions of the equations of magnetohydrodynamics. The volume edited by Landshoff consists of papers presented during a Symposium in Stanford University in 1957. Harris formulates the relativistic equations of motion for a conducting fluid in a magnetic field and

Pai (1957) the energy equation in magneto-gas-dynamics. Stewartson analyses toroidal oscillations of a fluid in a magnetic field, Iavorskaia studies the oscillations of an infinite self-gravitating gas cylinder in the presence of a magnetic field, Grad studies thermonuclear reaction rates in an electrical discharge, and Goto the relativistic magnetohydrodynamics. Butz discusses the physical bases of magneto-hydrodynamic sciences. Liboff calculates the transport coefficients, using the shielded Coulomb potential, McIlroy describes the principles of magnetohydrodynamics and some applications, Newcomb investigates the general relationship between the motion of the lines of force and of the particles, and Reichel reproduces lectures given by K. O. Friedrichs on relativistic hydromagnetics. Attention is called to a very thorough and fundamental series of notes on various topics in magneto-hydrodynamics issued by the Institute of the Mathematical Sciences, New York University.

A 2. Applications

Shercliffe treats a steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields and Michael a two-dimensional magnetic boundary layer problem. Loughhead (1955) solves numerically the equations of a compressible ionized fluid flow, and Kaplan and Staniukovich treat some one-dimensional problems in magneto-gasdynamics. Rossow examines the electromagnetic effects in viscous flow between two rotating cylinders. Berkowitz and Gardner treat the asymtotic series expansion for the motion of a charged particle in a slowly-varying magnetic field, Edmonds the hydromagnetic stability of a fluid in a magnetic field, and Neuringer and McIlroy determine the electromagnetic effects on the two-dimensional stagnation point flow on an infinite flat plate. Resler and Sears review the general field of magneto-aerodynamics. Kemp discusses the effect of a magnetic field on the inviscid fluid flow at the stagnation point, and Meyer deals with the possibility of reducing stagnation point heat transfer rates on blunt bodies at hypersonic speeds by means of an external magnetic field. Bleviss concludes that the magnetic field has a very great effect on the boundary layer characteristics in hypersonic flow.

A 3. Turbulence

The titels of papers on the turbulence in magneto-hydrodynamics, quoted in the list of references, are self-explainable and do not require any further comments. The list of references contains the titles of more papers than those mentioned in this brief review which are self-explainable.

References

1. Krzywoblocki, v., M. Z., F. Horiuchi and J. Voda: On the similarity Rules in Diabatic Flow. Proceedings, Third U. S. National Congress of Applied Mechanics, Brown University.
2. Nutant, J.: On the Similarity Rule in Magneto-Hydrodynamics. Thesis, University of Illinois, 1959. (Unpublished).
3. Von Mises, R.: Notes on Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow. Havard University, Graduate School of Engineering, Special Publication No. 2, 2nd Edition, 1949.

List of References to Appendix

A 1. Fundamentals

Bailin, L. L. and S. Silver: Exterior Electromagnetic Boundary Value Problems for Spheres and Cones. IRE Transactions on antenas and Propagation, Vol. AP—4, No. 1, Jan. 1956, pp. 5—16.

Banos, A.: Fundamental Wave Functions in an Unbounded Magneto-Hydrodynamic Field. I. General Theory. The Physical Review, Vol. 97, No. 6, pp. 1435—1443, March 15, 1955.

Braginskii, S. T.: O Tipakh Kolebanii Plazmy v Magnitnom Pole. AN SSSR Dokl., July 21, 1957, pp. 475—478 (In Russian). (Types of vibrations of plasma in a magnetic field).

Braginskii, S. T.: On the Modes of Plasma Oscillations in a Magnetic Field. Sov. Phys. — Dokl. May, 1958, pp. 345—349. (Translation).

Brewer, G. R.: Some Effects of Magnetic Field Strength on Space-Charge-Wave Propagation. Proceedings of the I. R. E. ,Vol. 44, No. 7, July, 1956, 896—903.

Brewer, G. R.: Formation of High-Density Electron Beams. Jour. Appl. Physics, Vol. 28, No. 1, 7—15, Jan. 1957.

Brewer, G. R.: Some Characteristics of a Cylindrical Electron Beam in Immersed Flow. IRE Trans. Vol. ED—4, No. 2, Apr. 1957, 134—140.

Butz, J. S., Jr.: Magnetohydrodynamics. I. Hope for Space. Aviation Week, May 12, 1958, pp. 48—50.

Butz, J. S., Jr.: Magnetohydrodynamics. II. Controlled Fusion Studies Open Space Engine Field. Ibid, May 19, 1958, pp. 50—57.

Butz, J. S., Jr.: Basic Factors Complicate Plasma Work. Aviation Week, June 2, 1958, pp. 36—38.

Chandrasekhar, S., A. N. Kaufman and K. M. Watson: Properties of an Ionized Gas of Low Density in a Magnetic Field. Ann. Phys., Nov., 1957, pp. 435—470.

Chester, W.: The Effect of a Magnetic Field on Stokes Flow in a Conducting Fluid. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 3, pp. 304—308, Dec., 1957.

Cowling, T. G.: Magnetohydrodynamics. Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.

Dorfman, I. G.: Magnetokhimiia Organicheskikh Soldinemii i Khimicheskie Sdvigi Iadernogo Magnitnogo Resonansa. AN, SSSR Dokl., March 21, 1958, pp. 518—519. (Russian) (Magnetochemistry).

Elsasser, W. M.: Hydromagnetic Dynamo Theory. Reviews of Modern Physics, Vol. 28, No. 2, pp. 135—163, Apr. 1956.

Finkelstein, D., G. A. Sawyer and T. F. Stratton: Supersonic Motion of Vacuum Spark Plasmas Along Magnetic Fields. Phys. Fluids, May-June, 1958, pp. 188—192.

Gershuni, G. Z. and E. M. Zhukhovitskii: Stationary Convective Flow of an Elastically Conducting Liquid Between Parallel Plates in a Magnetic Field. Soviet Physics, JETP, Vol. 34, No. 3, March, 1958, pp. 454—460.

Gershuni, G. Z. and E. M. Zhukhovitskii: Stability of the Stationary Convective Flow of an Electrically Conducting Liquid Between Parallel Vertical Plates in a Magnetic Field. Ibid, pp. 461—465.

Ginzburg, V. L.: Kriticheskii Tok dlia Sverkhprovodiashchikh Plenok. AN SSSR Dokl., Jan. 21, 1958, pp. 464—467 (In Russian). (On the critical current for superconducting films in a magnetic field).

Golitsyn, G. S.: Plane Problems in Magnetohydrodynamics. Soviet Physics, JETP, Vol. 34, No. 3, March, 1948, pp. 473—477.

Goto, Ken-iti: Relativistic Magnetohydrodynamics. Progress of Theoretical Physics, Vol. 20, No. 1, Jan., 1958, pp. 1—15.

Grad, H.: Thermonuclear Reaction Rates In an Electrical Discharge. Institute of Mathematical Sciences, New York University, Jan. 23, 1958.

Hansen, R. C.: Electromagnetic Field Solutions for Rotational Coordinate Systems Canadian Jour. of Physics, 34, 893—895, 1956.

Harris, E. G.: Relativistic Magnetohydrodynamics. The Physical Review, Vol. 108, No. 6, pp. 1357—1360, Dec. 15, 1957.

Iavorskaia, I. M.: Kolebaniia Beskonechnogo Gazovogo Tsilindra s Sobstvennoi Gravitatsiiei v Magnitom Pole. AN SSSR Dokl., June 11, 1957, pp. 988—990. (In Russian). Also: Sov. Phys.-Dokl., May-June, 1957, pp. 273-276. (Translation).

Institute of Mathematical Sciences, New York University: Notes on Magnetohydrodynamics.

I. Grad, H.: General Fluid Equations. Aug. 1, 1956.

II. Grad, H., and M. H. Rose: Dimensional Considerations. Aug. 7, 1956.

III. Grad, H.: Special Solutions. Aug. 14, 1956.

IV. Grad, H: Ohm's Law. Aug. 20, 1956.

V. Blank, A. A., K. O. Friedrichs and H. Grad: Theory of Maxwell's Equations without Displacement Current. Nov. 1, 1957.

VII. Blank, A. A., and H. Grad: Fluid Dynamical Analogies. July 15, 1958.

VIII. Friedrichs, K. O., and H. Kranzer: Nonlinear Wave Motion, July 31, 1958.

Janes, G. S. and R. M. Patrick: The Production of High Temperature Gas by Magnetic Acceleration. Avco Res. Lab. RR 27, March, 1958.

Kaufmann, A. N.: Effect of Charge Separation on Plasma Diffusion in a Strong Magnetic Field. Phys. Fluids, May-June, 1958, p. 252.

Kulikovskii, A. G.: On the Pulsations of a Plasma Filament. Sov. Phys. — Doklady, May-June, 1957, pp. 269—272. (Translation).

Landshoff, R. K. M., Editor: Magnetohydrodynamics. A Symposium. (Kolb, A. C.; Kosh, S. W.; and Retschek, H. E.), Stanford University Press, Stanford, 1957.

Liboff, R. L.: Computation of the Transport Coefficients Using the Shielded Coulomb Potential. Institute of Mathematical Sciences, New York University, June 20, 1958.

McIlroy, W.: Magnetohydrodynamics Is an Old Field with New Implications for Engineers. SAE Journal, April, 1958, pp. 90—93.

Newcomb, W. A.: Motion of Magnetic Lines of Force. Ann. Phys., April, 1958, pp. 347—385.

Pai, S. I.: Laminar Flow of an Electrically Conducting Incompressible Fluid in a Circular Pipe. Jour. of Applied Physics., Vol. 25, No. 9, 1205—1207, Sept. 1954.

Pai, S. I.: Magnetohydrodynamics and Magnetogasdynamics. Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland, Tech. Note BN—59, Sept. 1955.

Pai, S. I.: One-Dimensional Unsteady Flow of Magneto-Gasdynamics. Techn. Note BN—86, AFOSR—TN—56—537, AD—110356, University of Maryland, Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, Nov. 1956.

Pai, S. I.: Energy Equation of Magnetogasdynamics. Physical Review, Vol. 105, No. 5, pp. 1424—1426, March 1, 1957.

Pai, S. I.: One-Dimensional Unsteady Flow of Magnetogasdynamics. Proceedings, Fifth Midwestern Conference on Fluid Mechanics, 1957, Michigan University, Printing Office, pp. 251—261.

Pai, S. I.: Shock Wave Propagation in an Infinitely Electrically Conductive Gas with Transverse Magnetic Field and Gravitation. Tech. Note BN—109, AFOSR —TN—75—578, AD—136566, Univ. of Maryland, Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, Sept. 1957.

Pai, S. I.: Cylindrical Shock Waves Produced by Instantaneous Energy Release in Magnetogasdynamics. Techn. Note BN—120, AFOSR T. N. 58—215, AD 154—116, Univ. of Maryland, The Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, Febr. 1958.

Patrick, R. M.: Magneto-Hydrodynamics of Compressible Fluids. Ph. D. Thesis, Cornell University, 1956.

Piddington, J. H.: Galactic Turbulence and the Origins of Cosmic Rays and the Galactic Magnetic Field. Australian J. of Phys. Dec., 1957, pp. 515—529.

Reichel, P.: Basic Notions of Relativistic Hydromagnetics. Institute of Mathematical Sciences, New York University, April 15, 1958.

Rosa, R. J.: Engineering Magneto-Hydrodynamics. Part 2 of Ph. D. Thesis, Cornell University, 1956.

Rose, M. H.: On the Structure of a Steady Hydromagnetic Shock. One Fluid Theory. Institute of Mathematical Sciences, New York University, October, 1956.

Rosen, P.: Variational Approach to Magnetohydrodynamics. Phys. Fluids, May-June, 1958, p. 251.

Silin, V. P.: Oscillations of a Fermi liquid in a magnetic field. Soviet Physics JETP, Vol. 6 (33), No. 5, May, 1958, pp. 945—950. Transl. from: J. Exptl. Theoret. Phys. (USSR), 33, Nov. 1957, pp. 1227—1234.

Stewartson, K.: Toroidal Oscillations of a Spherical Mass of Viscous Conduction Fluid in a Uniform Magnetic Field. ZAMP, July 25, 1957, pp. 290—297.

Tanuiti, T.: An Example of Isentropic Steady Flow in the Magnetohydrodynamics. Progress of Theor. Physics, Vol. 19, No. 6, June 1958, pp. 749—751.

Trubnikov, B. A.: Izluchenie Plazmy v Magnitnom Pole. AN SSSR Dokl., Febr. 11, 1958, pp. 913—916 (In Russian). (Study of plasma radiation in a magnetic field).

Westfold, K. C.: Magnetohydrodynamic Shock Waves in the Solar Corona, with Applications to Bursts of Radio-Frequency Radiation. Philos. Mag., 8th Ser., Nov., 1957, pp. 1,287—1,302.

Zababakhin, E. I., and M. N. Nechaev: Electromagnetic Field Shock Waves and Their Cumulation. (Zhurnal Teoret. i Exper. Fiz., Aug., 1957, pp. 442—450). Sov. Phys. — JETP, Febr., 1958, pp. 345—351. (Translation).

Blank, A. A., and H. Grad: Fluid Magnetic Equations. General Properties. Notes on Magneto-Hydrodynamics. AEC, Computing and Applied Mathematics Center, Instit. of Mathem. Sciences, NYU. Physics and Mathem. NYU—6486, July 1, 1958.

Chandrasekhar, S.: On the Inhibition of Convection by a Magnetic Fluid. Phil. Mag. (7), 43, 1, 1952, 501—532.

Chandrasekhar, S.: The Stability of Viscous Flow Between Rotating Cylinders in the Presence of a Magnetic Field. Proc. Roy. Soc. A, 216, 293—309, 1953.

Chandrasekhar, S.: The Gravitational Instability of an Infinite Homogeneous Medium when Coriolis Force is Acting and a Magnetic Field is Present. Astrophys. J. 119, 7—9, 1954.

Chandrasekhar, S.: The Instability of a Layer of Fluid Heated Below and Subject to Simultaneous Action of Magnetic Field and Rotation. Proc. Roy. Soc. A, 225, 1954, 173—184.

Chandrasekhar, S.: Examples of the Instability of Fluid Motion in the Presence of a Magnetic Field. Proc. 5th Symp. Appl. Math. (AMS), 1954, 19—27.

Chandrasekhar, S., and E. Fermi: Problems of Gravitational Stability in the Presence of a Magnetic Field. Astrophys. J., **118**, 1953, 116—141.

Curle, N.: On the Stability, In the Presence of Coplanar Magnetic Field, of a Laminar Mixing Region in a Viscous Electrically Concucting Fluid. Gr. Brit. National Phys. Lab., ARC **18**, 720, FM 2461, October, 1956.

Kulikovskii, A. G.: O Dvizheniiakh s Odnorodnoi Deformatsiei v Magnitnoi Gidrodinamike. AN, SSSR Dokl., June 11, 1958, pp. 984—986. (In Russian).

Rikitake, T.: Magneto-Hydrodynamic Oscillations of a Perfectly Conducting Fluid Sphere Placed in a Uniform Magnetic Field. J. Physical Society of Japan, Vol. **13**, No. 10, Oct. 1958, pp. 1224—1230.

Burkhardt, L. C. et al.: Stability Studies with Longitudinal Magnetic Field on a Straight Pinched Discharge. J. App. Phys. **29**, 964—967 (1958).

Cole, G. H. A.: Some Aspects of Magnetohydrodynamics. Advances in Physics, 5, No. 20, Oct. 1956, 452—497.

Glonti, G. A.: On the Theory of the Stability of Liquid Jets in an Electric Field. Soviet Physics Vol. **34**, No. 5, May 1958, 917—918.

Greaney, W. A.: Interfacial Instability of Conducting Fluids in Magnetic Fields. M. S. Thesis, Cornell Univ. (Unpublished.)

Hines, C. O.: Generalized Magneto-Hydrodynamic Formulae. Proceed. Cambridge Philos. Soc. **49**, Part II, Apr. 1953, 299—307.

Kruskal, M. D., and M. Schwarzschild: Some Instabilities of a Fully Ionized Plasma. Proc. Roy. Soc. A **223**, 348—365 (1954).

Kruskal, M. D., and J. L. Tuck: The Instability of a Pinched Fluid with a Longitudinal Magnetic Field. Ibid, **245**, 222—237 (1958).

Lock, R. C.: The Stability of the Flow of an Electrically Conducting Fluid Between Parallel Planes Under a Transverse Magnetic Field. Proc. Roy. Soc. A **233**, 105—125 (1955).

Lundquist, S.: Studies in Magnetohydrodynamics. Ark. Fys. **5**, 297—347 (1952).

Nisbet, I. C. T.: Interfacial Instability of Fluids of Arbitrary Electrical Conductivity in Uniform Magnetic Fields. Cornell University, Grad. School of Aer. Eng. Ithaca, N.Y., 1958.

Northrop, T. G.: Helmholtz Instability of a Plasma. Phys. Rev. **103**, 1150—1154 (1956).

Rosenbluth, M. N., and C. L. Longmire: Stability of Plasmas Confined by Magnetic Fields. Ann Phys. **1**, 120—140 (1957).

Stepanov, K. N.: Kinetic Theory of Magnetohydrodynamics. Soviet Physics, Vol. **34**, No. 5, May 1958, 892—898.

Stewartson, K.: Motion of a Sphere through a Conducting Fluid in the Presence of a Strong Magnetic Field. Proceed. Cambridge Philos. Soc. **52**, Part 2, April 1956, 301—316.

Stewartson, K.: The Dispersion of a Current on the Surface of a Highly Conducting Fluid. Ibid, **53**, 774—775 (1957).

Stuart, J. T.: On the Stability of Viscous Flow Between Parallel Planes in the Presence of a Coplanar Magnetic Field. Proc. Roy. Soc. A **221**, 189—206 (1954).

Tayler, R. J.: A Note on Magnetohydrodynamic Stability Problems. Phil. Mag. (8), **2**, 33—37 (1957).

Tayler, R. J.: Hydromagnetic Instabilities of an Ideally Conducting Fluid. Proc. Phys. Soc. B **70**, 31—48 (1957).

Tserkovnikov, Y. A.: Stability of Plasmas in a Strong Magnetic Field. Zh. Eksp. teor. fiz. **32**, 67—74 (1957).

Yih, Chia-Shun: Effects of Gravitational or Electromagnetic Fields on Fluid Motion. Quart. Appl. Math. XVI, 4, Jan. 1959, 409—415.

A 2. Applications

Berkowitz, J., and C. S. Gardner: On the Asymptotic Series Expansion of the Motion of a Charged Particle in Slowly—Varying Fields. Institute of Mathematical Sciences, New York Univ., December 23, 1957.

Bleviss, Z. O.: Magnetogasdynamics of Hypersonic Couette Flow. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 25, No. 10, pp. 601—615, October, 1958.

Edmonds, F. N.: Hydromagnetic Stability of a Conducting Fluid in a Circular Magnetic Field. The Physics of Fluids Vol. 1, No. 1, Jan.-Febr., 1958, pp. 30—41.

Kaplan, S. A., and K. P. Staniukovich: The Solution of Inhomogeneous, One-Dimensional Problems in Magnetic Gasdynamics. Jour. of Exper. and Theoret. Physics, Acad. Sciences, USSR, 3, 2, Sept., 1956, pp. 275—278.

Kemp, N. H.: On Hypersonic Stagnation — Point Flow with a Magnetic Field. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 25, No. 6, pp. 405—407, June, 1958.

Lin, S. C. and L. Lamb: Electrical Conductivity of Thermally Ionized Air Produced in a Shock Tube. Res. Rep. 5, Avco Res Lab. (Contract AF—04(645)—18), Febr., 1957.

Loughhead, R. E.: Solution of Problems Involving the Hydromagnetic Flow of Compressible Ionized Fluids. The Physical Review, Vol. 99, No. 6, pp. 1678—1681, Sept. 15, 1955.

Loughhead, R. E.: Solution of flow problems in unidimensional Lagrangian hydromagnetics. Australian Journal of Physics, Vol. 10, No. 1, March, 1957, pp. 213—217.

Meyer, R. C.: On Reducing Aerodynamic Heat Transfer Rates by Magnetohydrodynamic Techniques. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 25, No. 9, pp. 561—566, September,1958. Also: IAS, 26th Meeting, New York, Jan. 27—30, Preprint 816.

Michael, D. H.: A Two-Dimensional Magnetic Boundary Layer Problem. Mathematika, Vol. 1, No. 2, Pt. 2, pp. 131—142, Dec., 1954.

Mugibayashi, N.: An Example of One-Dimensional Oscillatory Motion in Magnetohydrodynamics. Progress of Theoretical Physics, Vol. 20, No. 2, Febr., 1958, pp. 241—243.

Nakagawa, Y.: Experiments on the instability of a layer of mercury, heated from below and subject to the simultaneous action of a magnetic field and rotation. Proceed. Roy. Soc. (A), 242, No. 1228, Oct., 1957, pp. 81—89.

Neuringer, J. L.: Two-Dimensional Flow in the Vicinity of the Stagnation Point of an Incompressible, Viscous, Electrically Fluid in the Presence of a Magnetic Field. Republic Aviation Corp., June, 12, 1957.

Neuringer, J. L. and McIlroy, W.: Incompressible Two-Dimensional Stagnation — Point Flow of an Electrically Conducting Viscous Fluid in the Presence of a Magnetic Field. Journ. of the Aeronautical Sciences, Vol. 25, No. 3, pp. 194—198, March, 1958.

Neuringer, J. L. and McIlroy, W.: Hydromagnetic Effects on Stagnation Point Heat Transfer. J. Aero. Sci,.May, 1958, pp. 332—334.

Resler, E. J., and Sears, W. R.: The Prospects for Magneto-Aerodynamics. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 25, No. 4, pp. 235—245, April, 1958.

Rigrod, W. W.: Noise Spectrum of Electron Beam in Longitudinal Magnetic Field. I. — The Growing Noise Phenomenon. II. — The UHF Noise Spectrum. Bell System Tech. J. July, 1957, pp. 831—878.

Rossow, V. J.: On Flow of Electrically Conducting Fluids over a Flat Plate in the Presence of a Transverse Magnetic Field. NACA, TN 3971, 1957.

Rossow, V. J.: Magnetohydrodynamic Analysis of Heat Transfer near a Stagnation Point. J. Aero. Sci,. May, 1958, pp. 334—335.

Rossow, V. J.: Boundary Layer Stability Diagrams for Electrically Conducting Fluids in the Presence of a Magnetic Field. NACA, TN 4282, Aug., 1958.

Saito, Nobuhiko, and Tomakazu Kato: On the Viscoelasticy and Complex Dielectric Constant in the Presence of an Electric Field and a Shearing Laminar Flow in Solution of Macromolecules. Journal of the Physical Soc. of Japan, Dec., 1957, pp. 1, 393—1,402.

Shercliffe, J. A.: Steady Motion of Conducting Fluids in Pipes under Transverse Magnetic Fields. Proc. Cambridge Phil. Soc., Vol. 49, pp. 166—168, 1953.

Leeuw, de, J. H.: The Interaction of a Plane Strong Shock Wave with a Steady Magnetic Field. U.T.I.A., Rep. 49, March 1958.

A 3. Turbulence

Batchelor, G. K.: On the Spontaneous Magnetic Field in a Conducting Liquid in Turbulent Motion. Proc. Royal Society, (A), 201, 1950, p. 405.

Chandrasekhar, S.: The Invariant Theory of Isotropic Turbulence in Magneto-Hydrodynamics. Proceedings of the Royal Society, A, Vol. 204, 1950, pp. 435—449.

Eskinazi, S.: Turbulence Measurement in Electrically Conducting Fluids. Physics of Fluids, March-April, 1958, pp. 161—162.

Kraichnan, R. H.: Relation of Fourth to Second Moments in Stationary Homogeneous Hydromagnetic Turbulence. Institute of Mathematical Sciences. New York University, Research Rep. No. MH—6. Jan., 1957.

Kraichnan, R. H.: Statistical Mechanics of Stationary Homogeneous Hydromagnetic Turbulence. Institute of Mathematical Sciences. New York University, Research Rep. No. MH—7, Apr., 1957.

Kraichnan, R. H.: The Structure of Isotropic Turbulence at Very High Reynolds Numbers. Institute of Mathematical Sciences, New York University, Research Rep. No. MH—9, Febr., 1958.

Krzywoblocki, v., M. Z.: On the Equations of the Decay of Isotropic Turbulence in Magneto-Hydrodynamics. Jour. of the Physical Society of Japan, Vol 7, No. 5, pp. 511—512, Sept.-Oct., 1952.

Krzywoblocki, v., M. Z.: On the Equations of Isotropic Turbulence in Magneto-Hydrodynamics of Compressible Medium. Acta Physica Austriaca, Vol. VI, No. 2—3, 1952, 157—166.

Krzywoblocki, v., M. Z.: On the Fundamentals of Locally Isotropic Turbulence in Magneto-Hydrodynamics of a Compressible Medium. Acta Physica Austriaca, Vol. VI, 1953, No. 4, 250—256.

Some Aspects of the Problem of the Heavy Unstable Particles[1]

By

N. Dallaporta

Istituto di Fisica dell' Università — Padova
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare — Sezione di Padova

With 2 Figures

(*Received February 14, 1959*)

The rate of discoveries in the field of the new heavy unstable particles has been so rapid in the period between their first observation around 1948 and up to about 1955, that one could do little other than collect the new data and try to work out the most probable characteristics for the unknown particles that were coming out from them.

In fact, since the discovery at Bristol in 1948 of the π meson, the agent of the boson field strongly interacting with nucleons and mainly responsible for the nuclear forces, and while most of the attention of physicists was concentrated on it, other less abundant new particles were first suspected and successively identified in the cosmic radiation; as the most typical examples we may remember here the so-called V events observed by the Manchester group with the Wilson chamber, whose principal representative were later identified as the now so-called Λ neutral particle, of mass greater than the nucleon, which decays according to the scheme:

$$\Lambda^0 \rightarrow P + \pi^-;$$

the τ meson first identified with emulsion technique, characterized by the typical decay process:

$$\tau^{\pm} \rightarrow \pi^{\pm} + \pi^{\pm} + \pi^{\mp};$$

and the different types of K mesons, which in plate work appear as ending particles emitting a single charged secondary. These first results were actively pursued for some years essentially in cosmic ray work and were developed until practically the whole pattern of the decay types observed was obtained about 1955 in the so-called G-Stack experiment, together with a more or less accurate value of the mass of the

[1] Vortrag auf der Diskussionstagung „Kernphysik" der Österreichischen Physikalischen Gesellschaft, Wien März 1958.

particle responsible. Since then the discovery rate of particles has been much slowed down, so that, on the one hand, one has acquired the impression that, at least in this range of lifetimes, the picture we now have of the existing particles is more or less complete; on the other hand, the production of the new particles, confined in the beginning to the cosmic ray work, also became possible by artificial means as soon as the energy of the proton beam of the accelerators could reach energies sufficiently above the threshold for their production; and in fact this was achieved in 1955 with the machines of both BROOKHAVEN and BERKELEY, thus making it possible to obtain much more precise information on the observed phenomena and allowing some preliminary speculation to develop on this field. Therefore the moment is not unfavorable to make some reviews of the information that has so far been obtained and in fact in these last months some very important summaries of the situation have appeared. In the short time at my disposal, I can only hope to stress some of the more important aspects of the question and I think I will try to do this, first by summarizing what are the main points that we may consider more or less established in our knowledge of heavy unstable particles; and then by pointing out some of the problems that are to be investigated in order to achieve a preliminary general picture of the situation.

The first thing we may consider as practically settled concerns the types and characteristics of all the particles we know. Let us consider Table 1 which summarizes their principal data.

In column 1 are indicated the complete pattern of the decay reactions that have so far been observed, and which are used in some sense to define phenomenologically the different types of particles. In the next column 2, are plotted the masses which generally have been obtained from the energy balance of the decay reaction or by direct measurements. According to mass values, the new particles may be divided into two distinct categories: those with mass around 965 me, termed generally K mesons, and those with mass greater than the nucleon mass, the hyperons. The distinction between these two classes acquires a definite physical meaning when the value of the spin is considered, which is plotted in column 3 and which in general may be deduced from conservation of angular momentum in the decay reactions. All K mesons have even spin, presumably zero, and are therefore similar in their nature to the π meson. Hyperons on the contrary are FERMI particles, and since in all kinds of hyperon decays observed so far a nucleon is always found among the ultimate decay products, they may naturally be considered as a kind of excited states of the nucleon. So if we term with the word baryon all kinds of FERMI particles heavier than the nucleon including the nucleon itself, one can extend the principle of conservation of nucleons in a form which can be termed as conservation of baryons, and to which all decay reactions of Table 1 are seen to obey.

It may be remarked that with the introduction of this concept of baryon and by grouping under the name of leptons all other fermions

lighter than the nucleons, including the neutrino as limiting case with zero mass, all particles are gathered into the general types of baryons, leptons and mesons, these last ones being all the bosons which include the photon as limiting case of zero mass.

According to the data of Table 1, all charged K mesons are so similar to each other in any respect that they can be distinguished only by the types of decay, whose percentages are given in column 4.

The problem of deciding whether all the $K^{\pm}$ mesons are or are not a unique particle which decays according to different competing channels has been the crucial problem of particle physics during the last year and may now be considered as settled in the sense that all $K^{\pm}$ mesons are to be considered as being the same particle. Favourable evidence in this sense was brought not only by the fact that all $K^{\pm}$ mesons have within errors the same mass and a very similar lifetime, but also a very similar interaction length in nuclear interactions. Against it, however, there was equally strong evidence that the τ mode and the θ mode of decay could not be attributed to the same particle: this incompatibility was a consequence of the application of the fundamental conservation theorems of total angular momentum and parity to the reactions of the decay processes. The selection rules due to parity conservation applied to the θ mode of decay forbid all the possible values of spin and parity that were compatible with the angular and energy distributions of the 3 pions observed in the τ mode of decay (especially the most likely of them 0^-). This fundamental contradiction was the starting point which moved Lee and Yang to discuss the general validity of parity conservation and was in fact removed when non conservation of parity in weak interactions was experimentally established first for β decay, then for $\pi - \mu - e$ decays and finally for hyperon and $K\mu_2$ decays. Assuming non conservation of parity in these decays, there is no longer an objection that the θ mode and the τ mode are due to the same particle, and therefore no reasons for not considering all $K^{\pm}$ mesons as being an unique type of particle.

Let us now turn to the second, and main point that can be also considered as settled, at least in its phenomenological aspect, which is connected with the different kinds of interaction of which the new particles are capable. Experimentally it has been observed that K mesons and hyperons are produced in nuclear interactions with a cross section of about lmb at energies around 1 Bev, that is with a value somewhat smaller but of the same order of magnitude as π mesons. Moreover, all K mesons and hyperons decaying at rest in plates turn out to be positively charged; this is evidence that presumably for all new particles a phenomenon similar to that for π mesons must occur, that is negative particles when stopped in matter are captured in a Bohr orbit of an atom, from which they interact with the nucleus of the atom before having time to decay as positive particles do. Thus one observes both K^- capture and Σ^- capture stars just as one observes π^- capture stars, and this affords one of the first well observed examples

of strong nuclear interactions of the new particles. Finally mesons are also known to interact and scatter with nucleons and nuclei with cross sections of geometrical magnitude, and there are now indications that hyperons probably do the same; so all these effects point roughly to an interaction strength for the new particles with nucleons of about the same order of magnitude as the pion-nucleon interaction.

On the contrary all their lifetimes are too long to be compatible with this strength. In fact, with a simple calculation one sees that such lifetimes may be obtained, provided the interaction constants between the K or hyperons and their decay products are of the order of the weak interactions of β decay type. One is then faced with the following question: if K particles and hyperons are produced in nuclear interactions or captured by nuclei in strong interactions, one should expect that in decays also the same strong interactions should be effective, and that the lifetimes should be of the order of magnitude of 10^{-22} or so. There is thus a discrepancy of at least 10^{12} between what should be expected according to strong interactions and what is in effect observed. This discrepancy can be explained only if one assumes that in the decays something prevents the strong interactions from being effective, so that only the weak interactions can act. The explanation now accepted for this is the GELL MANN-NISHIJIMA scheme, which is essentially based on the idea that the strong interactions are forbidden in the decays of the new particles by a special selection rule which acts on them and on electromagnetic interactions but not on the weak decays. This is the so-called strangeness theory, which remains up to now the chief interpretation scheme of all the phenomenology of the new particles.

The starting point for this scheme has its root in the fact that from the first observations, some events were found in which two of these new particles were produced in a single interaction. Owing to the relatively small production cross section of these particles, these events appeared already as sufficiently anomalous on purely statistical grounds to imply that associated production should be considered as a probable characteristic feature of the new particles. In fact Pais made the precise assumption that the new particles cannot be produced singly.

And this would explain immediately why the lifetime is long: If strong interactions are bound to take place only when two or more new particles are involved, they cannot of course happen in the decays where only a single new particle is present. The strangeness theory gives a definite and formal rule from which this and similar other facts may be automatically deduced.

Let us consider the isotopic spin T and its third component T_3. The T_3 component is tightly linked to the charge Q by the relation:

$$Q = T_3 + \frac{N}{2} \tag{1}$$

N being equal to the number of fermions minus the number of anti-fermions and therefore is different from zero only for fermions, so that

T_3 must of course be conserved in all nuclear interactions, while the conservation of T is postulated in nuclear and pion interactions and this assumption is what is called charge independence of nuclear forces.

Let us assume that new particles may be grouped also in isospin multiplets and therefore possess given values for T and T_3, shown in Table 2, as is the case for the nucleon and the pion. To complete the Table only one particle, Ξ^0, not yet detected experimentally, has to be postulated. The most important remark that can be made about this GELL MANN-NISHIJIMA attribution of isotopic spin is the following: while for nucleons and pions, the isospin has the same statistics as the spin (that is nucleons have both spin and isotopic spin half integer, so they are both fermions and isofermions, pions have both spin and isotopic spin integer, so they are both bosons and isobosons), for the new particles the isostatistics is the opposite of the statistics, that is Λ and Σ hyperons which are fermions are chosen to be isobosons, while all K mesons which are bosons are chosen to be isofermions. Further, it may be remarked that all K mesons are given the same isospin, with the characteristic that they are divided into two doublets, K^+ and K^0, from one side and $\overline{K^-}$ with a second kind of $\overline{K^0}$ from another side, these latter being charge conjugates to the first doublet.

Now, the fundamental idea of GELL MANN and NISHIJIMA is the following: instead of considering charge and T_3 tightly linked together as they usually are, they assume that they have both to be conserved in a reaction, but independently one from the other. This means that they can no longer be considered as linked by the preceding relation (1), but by a more general one which may be written as:

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \qquad Y = N + S \tag{2}$$

In this expression S (or Y) is a new quantum number called the strangeness; any two of the three numbers Q, T_3, and S are to be conserved indepedently. The most easy choice is to assume as fundamental the conservation of charge Q and strangeness S. From the known values for each particle of Q and T_3 already given, the strangeness for it can be deduced and is tabulated in Table 2; the most common expression for the new selection rule is to say that apart from charge in each reaction the total strangeness is also conserved. This assumption explains all the most typical properties of the new particles.

Let us illustrate with some examples what are the effects of this selection rule.

The only particles with positive strangeness are the K's, (K^+ and K^0). So, if a K is produced in a nucleon-nucleon or pion nucleon collision, a particle with negative strangeness -1, hyperons or $\bar{K}$'s ($\bar{K}^-$ or $\bar{K}^0$), must be contemporarily produced:

$$\pi + N \to K + \begin{matrix} \Lambda \\ \Sigma \end{matrix} \qquad \pi + N = K + \bar{K} + N$$

$$N + N \to K + \begin{matrix} \Lambda \\ \Sigma \end{matrix} + N \qquad N + N \to K + \bar{K} + N + N$$

This is the so-called associated production. Therefore associated production always involves a K; it is impossible to produce in association a K^- with a hyperon or two hyperons together.

K^- capture phenomena and Σ^- capture phenomena which occur with a strangeness -1 in the first member of the reaction must give rise to secondaries with a total strangeness -1. The following scheme is now assumed to hold for the two cases:

$$K^- + N \to \begin{cases} \Lambda + \pi \\ \Sigma + \pi \end{cases} \qquad \Sigma^- + N \to \Lambda + N$$

Sometimes, either in associated production or in the K^- capture, the resulting Λ hyperon emerges embedded in a nucleonic fragment, called an hyperfragment, which of course is unstable owing to the fact that the Λ contained in it decays and thus induces the hyperfragment to disintegrate.

The K^- capture phenomena may be considered as those in which the validity of the strangeness concept and of the GELL MANN rules have been first established in a quite convincing way. The bubble chamber which has been the technique most suited for studying these events in pure hydrogen, was also expected to be the most suited apparatus for studying the production phenomena in order to test there the validity of the associated production hypothesis.

A further very strong confirmation for the GELL MANN-NISHIJIMA ideas has been obtained from the study of the scattering and interactions in flight of K mesons by nuclei and hence by nucleons. According to this scheme, one should foresee that for a beam of K^- mesons interacting with nuclei, not only pure scattering of the mesons on nucleons should occur, but also the capture of them by nucleons according to the same reactions that have been shown to occur in the capture of K^-'s at rest, and which are all those that preserve the conservation of the total strangeness; that is all reactions of types

$$K^- + N \to K^- + N$$

$$K^- + N \to \begin{cases} \Lambda + \pi \\ \Sigma + \pi \end{cases}.$$

On the contrary, for K^+ mesons, only interactions of pure scattering should occur

$$K^+ + N \to K^+ + N$$

because the strangeness of K^+ mesons is $+1$, and as no other kind of particle exists with this value, K^+ mesons cannot be absorbed by nucleons. In this case also these predictions of the strangeness scheme have been

verified step by step as soon as the above-quoted phenomena were observed and studied.

Thus, there appears to be little doubt that something very fundamental has been expressed in the strangeness selection rule for the strong interactions. It must be added that in order to prevent electromagnetic decays, which would give a too short lifetime, strangeness has to be conserved also in electromagnetic interactions.

On the contrary, it is easily seen that in all decay reactions that we have considered, strangeness is not conserved. The violation of conservation of strangeness and of T_3, impossible for strong and electromagnetic interactions, occurs only for weak interactions. A selection rule of $\Delta T_3 = \frac{1}{2}$ is suspected to hold in these cases, but has not yet been demonstrated.

Let us now turn to a third point that can also be considered very probably as settled; the peculiar physical interpretation that can now be given to the neutral K mesons. In the above-quoted experiments intended to test the Gell Mann-Nishijima rules in associated production phenomena, it was concluded that all observations were compatible with associated production occurring in every case, except for one kind of particle, the K^0, best observed in the reaction $\pi + N = \Lambda^0 + K^0$, whose frequency was about $\frac{1}{2}$ of what it should have been, according to the above assumption. In the general good fit of the theory such an exception was rather surprising and an explanation for it had to be looked for. In fact it was found in a theoretical scheme proposed by Pais and Gell Mann and based on the following considerations.

One of the chief features of the Gell Mann-Nishijima scheme divides the K particles into two doublets, the K's (K^+ and K^0) and $\bar{K}$'s (K^- and $\overline{K^0}$) of opposite strangeness, which may be considered as charge conjugate to each other. While in this scheme it is obvious that K^- is conjugate to K^+, it becomes necessary to introduce a $\overline{K^0}$ as conjugate to K^0, and consequently to distinguish two kinds of K^0 with opposite strangeness. Now if each of the K^0 particles is not conjugate to itself, (as is the case for π^0) it cannot have a definite value for the eigenvalue of the charge conjugation operation. In order to obtain such definite eigenvalue, we have to build the following linear combinations:

$$K_1^0 = \frac{K^0 + \overline{K^0}}{\sqrt{2}} \qquad K_2^0 = \frac{K^0 - \overline{K^0}}{\sqrt{2}}$$

and then it is immediately seen that by changing K^0 into $\overline{K^0}$, the K_1^0 state does not change sign and is therefore a symmetric state pertaining to the eigenvalue $+1$ for charge conjugation, while K_2^0 changes sign and is therefore an antisymmetric state pertaining to the eigenvalue -1. Now the interesting physical fact is this: in production involving strong interactions strangeness is conserved and therefore, the observable states are K^0 or $\overline{K^0}$ with definite values of strangeness; the situation however is reversed at decay where strangeness is not conserved and

therefore may not have a definite value, while the charge conjugation character has to be conserved. If further we consider that the K^0 may decay in a certain number of pions, it is easily seen that two pions can only form a state of conjugation character + 1. Therefore K_1^0 may decay into two pions, while this is forbidden for K_2^0, which must decay in a different way. As these different decays should have different lifetimes, it turns out that K_1^0 and K_2^0 are physically different particles which may be distinguished according to their different decay modes and their different lifetimes.

The general relation between these four kinds of K's is therefore a kind of quantum mechanical admixture of two of them that may give the other two, according to the point of view of which observables are to be observed. If the interaction is such as to point out definite values for strangeness as in production, we see K^0 and $\bar{K}^0$, if, on the contrary, we have transitions between states with definite conjugation type, as in decay, we see K_1^0 and K_2^0, each K^0 or $\bar{K}^0$ going in half K_1^0 and half K_2^0.

This theory of GELL MANN and PAIS explains the experimental situation at hand with the K^0. If each produced K^0 is at decay a mixture of half K_1^0 and half K_2^0, and if only K_1^0 decays into two pions with a given mean life, then one has to identify all the observed K^0 in the preceding experiments with these K_1^0, thus obtaining just one half of the total number expected to be produced, and assume that, owing to the different type of decay and especially to a different lifetime, all K_2^0 are lost. One had then to look for the existence of these K_2^0 of different lifetime, let us say a longer one, which were expected to escape from the chamber before decaying, and with modes of decay different from the K_1^0 since the two pion decay was excluded for them. In fact, in a crucial experiment initiated last year at BROOKHAVEN by LEDERMAN and his collaborators, with a cloud chamber placed at a distance from the target such that all K_1^0 with their short lifetime of 10^{-10} sec. should have decayed before they could reach the chamber, many such events have been observed, establishing the existence of a long lived type of K_2^0 meson, as was required by the PAIS-GELL MANN scheme; the exact value of this lifetime has not yet been measured with great precision, its order of magnitude seems, however, to be around 10^{-7} sec. All decays of this long lived component appear to be anomalous, that is no one has been seen decaying into two pions. The types of these anomalous decays observed up to now are also given in Table 1, with their actual frequency. Most of these types are the neutral counterparts of types already known from the decay of charged K's, so that one can say now that each charged decay type (excepting the $K\mu 2$) has a corresponding neutral decay type.

The preceding points that I have thus far briefly outlined may be considered as constituting up to now the main conceptual structure of our knowledge of strange particles. Should we try to summarize in a few words of what kind this conceptual structure is, we should say perhaps that it reveals a general classification of particles and the display

of definite selection rules and conservation theorems acting more or less in dependence of the kind of interaction which is at hand.

If we want now to express this somewhat more explicitely, we may try to describe the very general outline of the situation as follows: there are essentially three main categories of particles that we have already indicated, baryons, leptons and mesons; and it appears now that the essential physical difference between them is in close connection with the different kinds of interactions they display and the different ways they are allowed to act.

Baryons only, which are fermions, are the source of the strong interactions: this source is commonly assumed to be a new physical quantity called the nuclear charge N; nuclear charge is presumably conserved in any kind of interaction and this conservation manifests itself in the law of conservation of baryons. The agents of the strong interactions, or the quanta of the nuclear fields generated by the nuclear charge, are the mesons, both π's and K's, which are bosons; the way in which the strong interactions due to them act, is characterized by severe selection rules, such as conservation of parity, isospin, strangeness.

Both baryons and mesons are directly or indirectly the source of weak interactions, whose principal agents appear to be the lepton pairs, μ-neutrino or electron-neutrino: the strength of the weak interaction is always about the same, whether in the decay of hyperons, of mesons or β decay of nucleons. Their way of acting is not hindered by so many conservation principles; there is no conservation of parity, nor of isospin, nor of strangeness.

Finally, all charged particles, baryons, mesons or leptons are the source of the electromagnetic field, whose agent is the photon. The strength of electromagnetic interactions is intermediate between strong and weak ones, they do not conserve isospin, but conserve strangeness.

According to this general picture it is apparent that the trend of investigations concerning the knowledge of particles should essentially be oriented towards a deeper understanding of the different kinds of interactions and to the probable symmetry properties they impose more or less on the particles. And in fact one may say that both theoretical and experimental work is going on along these lines. Actually the problem of the weak interactions is at the center of physical attention, because after the discovery of the nonconservation of parity and the introduction of the two component theory of the neutrino, a general revision of all weak interaction phenomena is at hand with the hope of arriving at a general understanding of them. However, for what concerns the problem of the new particles in itself, that is the understanding of how and why the particles we observe are what they are, the consideration of the strong interactions, although more difficult to handle owing to the mathematical difficulties of any theory with a large coupling constant, is perhaps more significant, because the problem is in many senses more clear cut and defined.

This greater definedness of the strong interactions depends mainly on two facts: 1. While the general form of weak interactions even for the usual or normal particles is as yet unknown and looked for, we have, even if we don't know how we may correctly handle them, more definite ideas on the form of the strong pion-nucleon interaction and on the way it acts; therefore it is easier in a sense to differentiate any kind of new interaction with respect to a well defined form rather than to compare it with as yet undefined types. 2. it appears actually that, the more strong the interaction is, the greater the number of the conservation laws to which it is subject. The lack of conservation of strangeness and now of parity in weak interactions allows a great variety of possible types which makes the problem of guessing the true ones extremely ill defined. On the contrary the number of conservation laws to which strong interactions are subject provides a well defined frame with relatively few degrees of freedom within which one can try to fit the strong interactions of the new particles.

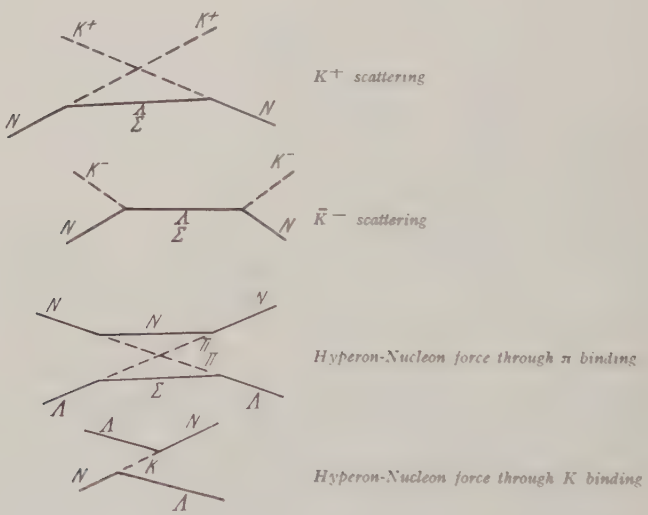

Fig. 1

Just as a closing point, I may try to mention very briefly some of the most common approaches used actually as a starting point for their understanding. Owing to the assumption of the GELL MANN-NISHIJIMA scheme, conservation of the total isotopic spin has generally been assumed to hold for all strong interactions of the new particles and this allows us to express these interactions with an Hamiltonian (the d'ESPAGNAT-PRENTKI Hamiltonian), whose terms containing the fundamental interactions, $N N \pi, \Lambda \Sigma \pi, \Sigma \Sigma \pi, N K \Lambda, N K \Sigma$ and so on, are such as to express the conservation of strangeness for each of

these terms. The only unknown elements in these terms (assuming all mesons with spin 0 and all hyperons with spin $\frac{1}{2}$) are then the type of coupling between the different kinds of particles and the strength of these couplings. One can then hope to gain some information on these physical quantities and operators by calculating different phenomena according to different possible assumptions for the unknown parameters and then comparing with the experimental data: the phenomena considered for this purpose are actually K^+ nucleon scattering, K^- nucleon scattering, K^- capture associated production and the binding energy of Λ hyperons with nucleons as deduced from the data on hyperfragments.

According to elementary field theory, the most straightforward interpretation of these phenomena is based on the FEYNMAN diagrams, such as given in Fig. 1.

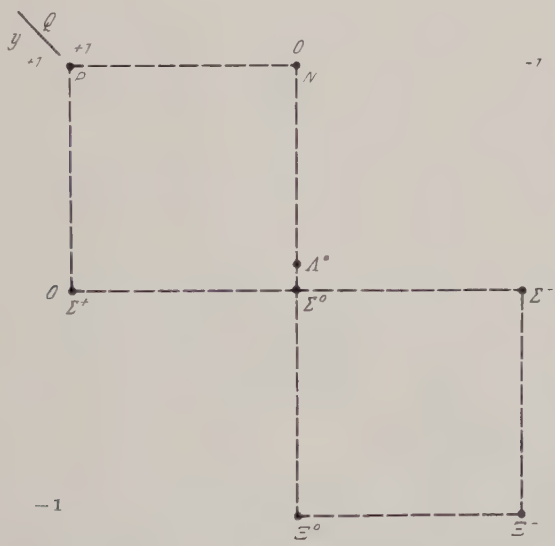

Fig. 2

The vertices of all these diagrams contain KNY or YYπ interactions (Y either Λ or Σ) and by postulating different types of coupling for them, one gets different interaction potentials or cross section to compare with the experimental data; of course the results that can be obtained with such methods are only of an indicative character.

Actually, the investigations are in progress and no clear cut situation has so far been obtained. Perhaps, the most consistent picture comes from the theoretical work concerning hyperfragments; it appears as probable that the coupling $\Sigma\Lambda\pi$ is pseudoscalar as $NN\pi$ and that

the strength of the interaction is about the same in the two cases $g^2/4\pi \sim 15$, while the strength of the NKY interaction seems on the contrary to be somewhat weaker, of the order $g^2/4\pi \sim 2$; no clear indication on the scalarity or pseudoscalarity of this interaction may be considered as established up to now.

When more definite information on these points will be available then, as the most important consequence of it, some criteria will be at hand in order to test the second important aspect of the problem to which I wanted to draw attention: that is the question of the possible symmetries which underlie the scheme of the particles. These symmetries are apparent in some sense as soon as we plot the scheme of the hyperons according to Fig. 2, where in abscissae are indicated the values of the electric charge and in ordinate the strangeness. One sees that the scheme should be quite symmetric with respect to Q and Y, if all baryons had the same mass. As they have different masses, the symmetry is spoilt; it is then supposed that the fundamental interactions should possess this high degree of symmetry and make the baryons of the same mass, while there is some perturbation whose main effect is the splitting of the masses of the hyperons. Therefore one further important point which may perhaps be experimentally understood by testing and proving the possible form and strengths of the interactions is the true distinction between the features of the fundamental symmetrical scheme and the elements due to the secondary perturbation, and of course the interactions to which they are due. Up to now there have been two main general ideas expressed in order to interpret the facts.

The first has been proposed a year ago by SCHWINGER and is based on the idea that all the interactions between baryons through both the pion and the K field are symmetric with respect to charge and strangeness and therefore should not cause the splitting of the baryon masses; this splitting is then due to a secondary direct interaction between K mesons and π mesons which reverses its sign by reversing the value of hypercharge.

The second, proposed first by GELL MANN, considers that all baryons when perturbations are turned off, should have the same intrinsic property and interact in the same way with the pion field which should constitute the strongest interaction; on the contrary, only a moderately strong interaction should be due to the K field, and this should act as a perturbation with respect to the π interaction and split the baryon masses.

This brief review of the achievements and of the further approaches that have now been made in order to understand the scheme of the elementary particles does of course not aim to give a comprehensive outlook of the whole work that is now going on on this field, but only to choose and to stress some of the important points which have recently been understood and proposed in order to clarify the facts, and I may only hope that although it has been so rapid and incomplete, it may have given perhaps a rough idea of the complexity and the interest of the problems which it involves.

	Name	Decay Process	Mass in MeV	ΔM	Spin	Relative Abundance	Lifetime in sec.
Leptons	$\nu\ \bar{\nu}$ neutrino		0		$\frac{1}{2}$		
	$e^{\pm}$ Electron	Stable	0,510 976		$\frac{1}{2}$		$2{,}22 \pm 0{,}02 \cdot 10^{-6}$
	$\mu^{\pm}$	$\mu^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + \nu + \bar{\nu}$	105,70 $\pm$ 0,06		$\frac{1}{2}$		
	γ photon		0		1		
Mesons	$\pi^{\pm}$	$\pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu$	139,63 $\pm$ 0,06	4,6	0		$2{,}56 \pm 0{,}05 \cdot 10^{-8}$
	π^0	$\pi^0 \rightarrow 2\,\gamma$	135,04 $\pm$ 0,16				$< 0{,}4 \cdot 10^{-15}$
	$\theta^{\pm} = \chi^{\pm} = K^{\pm}_{\pi 2}$ ($K^{\pm}$)	$\chi^{\pm} \rightarrow \pi^{\pm} + \pi^0$	493,98 $\pm$ 0,14		0	25 $\pm$ 2	$1{,}24 \pm 0{,}02 \cdot 10^{-8}$
	$K^{\pm}_{\mu 2}$ ($K^{\pm}$)	$K^{\pm}_{\mu 2} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu$				60 $\pm$ 2	
	$\tau^{\pm} = K^{\pm}_{\pi 3}$ ($K^{\pm}$)	$\tau^{\pm} \rightarrow \pi^{\pm} + \pi^{\pm} + \pi^{\mp}$				5,81 $\pm$ 0,4	
	$\tau'^{\pm} = K^{\pm\prime}_{\pi 3}$ ($K^{\pm}$)	$\tau'^{\pm} \rightarrow \pi^{\pm} + \pi^0 + \pi^0$				1,7 $\pm$ 0,3	
	$K^{\pm}_{\mu 3}$ ($K^{\pm}$)	$K^{\pm}_{\mu 3} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu + \pi^0$				3,0 $\pm$ 1	
	$K^{\pm}_{e 3}$ ($K^{\pm}$)	$K^{\pm}_{e 3} \rightarrow e^{\pm} + \nu + \pi^0$				4,7 $\pm$ 1,3	
	$\theta^0 = K_1{}^0$	$\theta^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ / $\pi^0 + \pi^0$	493 $\pm$ 5		0	~86 / ~14	$0{,}95 \pm 0{,}08 \cdot 10^{-10}$
	$K_2{}^0 \longrightarrow$	$K_2{}^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ (2) / $\mu^{\pm} + \pi^{\mp} + \nu$ (12) / $e^{\pm} + \pi^{\mp} + \nu$ (28)				2 / 12 / 28	$\sim 10^{-7}$
Baryons	P proton	Stable	938,211 $\pm$ 0,001	1,294	$\frac{1}{2}$		
	N neutron	$N \rightarrow P + e^- + \nu$	939,505 $\pm$ 0,001				$11{,}7 \pm 0{,}3$ min
	Λ^0	$\Lambda^0 \rightarrow P + \pi^-$ / $N + \pi^0$	1114,82 $\pm$ 0,18		$\frac{1}{2}$	~67 / ~33	$2{,}85 \pm 0{,}2 \cdot 10^{-10}$
	Σ^+	$\Sigma^+ \rightarrow P + \pi^0$ / $N + \pi^+$	1189,70 $\pm$ 0,25	6,95		~50 / ~50	$0{,}69 \pm 0{,}1 \cdot 10^{-10}$
	Σ^-	$\Sigma^- \rightarrow N + \pi^-$	1196,65 $\pm$ 0,35	8 ± 3	$\frac{1}{2}$		$1{,}6 \pm 0{,}2 \cdot 10^{-10}$
	Σ^0	$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$	1188,65 $\pm$ 3				$< 1 \cdot 10^{-11}$
	Ξ^-	$\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$	1321 $\pm$ 3,5		?		$4{,}6 < r < 200 \cdot 10^{-10}$

Table 2

	Q	T	T_3	N	S	$Y = S + N$
		Mesons				
π^+	$+1$	1	1	0	0	0
π^0	0		0			
π^-	-1		-1			
K^0	$+1$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$		$+1$	$+1$
K^0	0		$-\frac{1}{2}$			
$\overline{K^0}$	0	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$		-1	-1
$\overline{K^-}$	-1		$-\frac{1}{2}$			
		Baryons				
P	$+1$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	1	0	$+1$
N	0		$-\frac{1}{2}$			
Λ^0	0	0	0		-1	0
Σ^+	$+1$	1	$+1$		-1	0
Σ^0	0		0			
Σ^-	-1		-1			
Ξ^0	0	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$		-2	-1
Ξ^-	-1		$-\frac{1}{2}$			

Versuch einer endlichen Theorie des Elektrons

Von

Otto Bergmann

Physikalisches Institut der Universität in Alabama, U.S.A.[1]

(*Eingegangen am 11. März 1959*)

Zusammenfassung

Es wird eine klassische relativistische Theorie des Elektrons untersucht. Die Theorie enthält keine unendlichen Ausdrücke für physikalisch sinnvolle Größen. Da aber die Reaktionskraft der Strahlung fehlt, müssen andere Züge der Theorie zur Erklärung des Strahlungsverlustes herangezogen werden. Eine einzige elektrische Welle trägt nach dieser Theorie weder Energie noch Impuls und erst dem Zusammenwirken von zwei oder mehr Wellen, die von verschiedenen Elektronen stammen, wird Energie und Impuls zuerkannt. Im letzten Abschnitt wird eine halb-klassische Theorie des Elektrons als Illustration angeführt. — Obwohl natürlich auf klassischer und nicht-statistischer Grundlage kein endgültiges Urteil über diese Theorie gefällt werden kann, scheint diese Methode doch erfolgversprechend.

1. Grundzüge der Theorie

Für die Schwierigkeiten, die eine widerspruchsfreie Theorie des Elektrons verhindern, wird manchmal die Tatsache verantwortlich gemacht, daß diese Theorie in der heutigen Form linear ist. Dementsprechend treten auch in anderen linearen Theorien diese Schwierigkeiten auf, zum Beispiel in der kürzlich behandelten Gravitationstheorie[2]. In einer folgenden Arbeit[3] hat aber der Verfasser an Hand derselben Theorie gezeigt, wie man gerade die Linearität der Theorie benützen kann, um die ernstesten Schwierigkeiten zu beseitigen. Wir wollen diese Methode auf die Theorie des Elektrons anwenden.

Es sei $f^{\alpha\beta}$ ein elektromagnetischer Tensor, der den MAXWELLschen Gleichungen mit einer Stromverteilung j^{α} genügt

$$f^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = j^{\alpha} \tag{1}$$

[1] Von RIAS, Baltimore 12, Maryland, U.S.A., während des Winter-Semesters 1958—59 beurlaubt.

[2] O. BERGMANN, Am. Jour. Phys. **24**, 38 (1956).

[3] Am. Jour. Phys. (im Erscheinen).

Mit $\phi^{\alpha\beta}$ bezeichnen wir einen anderen elektromagnetischen Tensor der der homogenen Gleichung genügt

$$\phi^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0 \tag{2}$$

Sowohl $f^{\alpha\beta}$ als auch $\phi^{\alpha\beta}$ sind natürlich auch Lösungen der anderen Gruppe der MAXWELLschen Gleichungen, zum Beispiel

$$f_{[\alpha\beta,\mu]} = 0 \tag{3}$$

Multiplizieren wir (1) mit $f_{\alpha\mu}$, so können wir die linke Seite bekanntlich als die Divergenz eines Energie-Impulstensors schreiben. Mit

$$t^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{1}{4}\,(f^{\kappa\lambda} f_{\kappa\lambda})\,\delta^{\alpha}{}_{\beta} - f^{\alpha\kappa} f_{\beta\kappa} \tag{4}$$

erhält man nämlich

$$t^{\alpha}{}_{\beta,\alpha} = j^{\alpha} f_{\beta\alpha} \tag{5}$$

In derselben Weise erhält man als Folge von (2) den Erhaltungssatz

$$\left\{\frac{1}{4}\,(\phi^{\kappa\lambda}\,\phi_{\kappa\lambda})\,\delta^{\alpha}{}_{\beta} - \phi^{\alpha\kappa}\,\phi_{\beta\kappa}\right\}_{,\alpha} = 0 \tag{6}$$

und, da $f^{\alpha\beta} + \phi^{\alpha\beta}$ natürlich auch den Gln. (1) und (3) genügen, können wir schließlich auch den Erhaltungssatz

$$t^{\alpha}{}_{\beta,\alpha} + T^{\alpha}{}_{\beta,\alpha} = j^{\alpha}\,(f_{\beta\alpha} + \phi_{\beta\alpha}) \tag{7}$$

ableiten, worin

$$T^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{1}{2}\,(f^{\kappa\lambda}\,\phi_{\kappa\lambda})\,\delta^{\alpha}{}_{\beta} - f^{\alpha\kappa}\,\phi_{\beta\kappa} - \phi^{\alpha\kappa} f_{\beta\kappa} \tag{8}$$

gesetzt wurde und der Tensor (6) weggelassen wurde. Da nun der erste Ausdruck der linken Seite in (7) gleich dem ersten Teil der rechten Seite ist, können wir diese zwei Terme weglassen. Wenn wir dies tun, haben wir aber auch die ernstesten Schwierigkeiten der Theorie beseitigt. Für ein Punktpartikel ist nämlich

$$f^{\alpha\beta} \sim r^{-2} \tag{9}$$

und der Tensor (4) ist also für diese einfachste Lösung der MAXWELLschen Gleichungen nicht integrabel.

Die rechte Seite der Gleichung ist natürlich auch nicht integrabel. Das Weglassen von (6) bringt zunächst wenig Vorteil, aber wir werden später sehen, daß man auch ohne dieses Glied auskommt.

Wir müssen nun die rechte Seite von (7) so umformen, daß der Erhaltungssatz von Energie und Impuls die Form

$$(T^{\alpha}{}_{\beta} + \theta^{\alpha}{}_{\beta})_{,\alpha} = 0 \tag{10}$$

annimmt. Wir führen die Gleichung der Weltlinie des Elektrons ein und verwenden als Parameter die Weltdistanz längs der Weltlinie. Wir schreiben also $X^{\alpha}(s)$ und setzen nun

$$j^{\alpha}\,\phi_{\beta\alpha} = -\,\theta^{\alpha}{}_{\beta,\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \int ds\, m\, \dot{X}^{\alpha}\, \dot{X}_{\beta}\, \delta(x^{\kappa} - X^{\kappa}) \tag{11}$$

und erhalten mit Hilfe einer partiellen Integration

$$j^\alpha \phi_{\beta\alpha} = -\int ds\, m \ddot{X}_\beta\, \delta(x^\kappa - X^\kappa) \tag{12}$$

abgesehen von Beiträgen an den Randpunkten. Nun brauchen wir nur noch den bisher unbestimmt gelassenen Stromvektor durch

$$j^\alpha = e \int ds\, \dot{X}^\alpha\, \delta(x^k - X^\kappa) \tag{13}$$

definieren, und die LORENTZ-Gleichung für ein Elektron im äußeren Feld $\phi^{\alpha\beta}$ folgt

$$m \ddot{X}_\beta = e \dot{X}^\alpha \phi_{\alpha\beta} \tag{14}$$

Die Selbstkraft des Elektrons fehlt hier und wir wollen im folgenden untersuchen, ob man auch ohne diese mathematisch etwas zweifelhaften Kraftkomponenten auskommen kann.

Eine Schwierigkeit muß hier aber doch erwähnt werden: Die Energie und der Impuls des Feldes hängt wesentlich davon ab, wie man die Aufspaltung in das von der Partikel erzeugte Feld und das äußere Feld vornimmt. Da wir zu $f^{\alpha\beta}$ eine willkürliche Lösung der homogenen Gleichung addieren können, ist der Ausdruck für die Energie und den Impuls des Feldes nicht eindeutig bestimmt.

Eine andere Schwierigkeit tritt auf, wenn wir das Mehrkörperproblem behandeln wollen. Wenn $f^{\alpha\beta}$ wieder das Feld bedeutet, das von den Partikel erzeugt wird, so wird man Bewegungsgleichungen erhalten, die nur das äußere Feld, nicht aber das Feld der anderen Partikel enthalten. Diese Schwierigkeit löst sich ganz einfach, wenn ein $f^{\alpha\beta}(A)$ für jede Partikel A eingeführt wird, wobei dann natürlich für jede Funktion $f^{\alpha\beta}(A)$ die oben erwähnte Unbestimmtheit besteht. Wir wollen diese Gleichungen gleich von einem Wirkungsprinzip ableiten. Wir schreiben für die LAGRANGE-Funktion

$$L + \Lambda \tag{15}$$

mit

$$L = \frac{1}{2} \sum_{A=1}^{N} f^{\alpha\beta}(A)\, \phi_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \sum_{A<B}^{N} \sum^{N} f^{\alpha\beta}(A)\, f_{\alpha\beta}(B) \tag{16}$$

wo $\phi^{\alpha\beta}$ wieder ein äußeres Feld bezeichnet. Die LAGRANGE-Funktion der Teilchen und der Wechselwirkung der Teilchen mit dem Feld ist

$$\Lambda = \sum_{A=1}^{N} \int d\tau \left\{ m(A) \sqrt{\dot{X}^\alpha(A)\, \dot{X}_\alpha(A)} - e(A)\, \dot{X}^\alpha(A) \left(\Gamma_\alpha + \sum_{B \neq A} G_\alpha(B) \right) \right\} \cdot \delta\big(x^\lambda - X^\lambda(A)\big) \tag{17}$$

In der letzten Gleichung wurden die Vektorpotentiale

$$f_{\alpha\beta}(A) = G_{\beta,\alpha}(A) - G_{\alpha,\beta}(A) \tag{18}$$

$$\phi_{\alpha\beta} = \Gamma_{\beta,\alpha} - \Gamma_{\alpha,\beta} \tag{19}$$

eingeführt. Aus dem Wirkungsprinzip

$$\delta \int d^{(4)}x\,(L + A) = 0 \tag{20}$$

erhalten wir tatsächlich nach einfacher Umformung die MAXWELLschen Gleichungen für die Partikelfelder und für das äußere Feld

$$f^{\alpha\beta}{}_{,\beta}(A) = j^{\alpha}(A) \tag{21}$$

$$\phi^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0 \tag{22}$$

worin $j^{\alpha}(A)$ der zum Teilchen A gehörende Stromvektor (13) ist. Außerdem liefert das Wirkungsprinzip die Bewegungsgleichungen

$$m(A)\,\ddot{X}_{\beta}(A) = e(A)\,\dot{X}^{\alpha}(A)\left[\phi_{\alpha\beta} - \sum_{B \neq A} f_{\alpha\beta}(B)\right] \tag{23}$$

Die Erhaltungssätze kann man entweder mit der früher erwähnten Methode finden oder man macht Gebrauch von allgemeinen Sätzen der klassischen Feldtheorie. Es ergibt sich so

$$(T^{\alpha}{}_{\beta} + \theta^{\alpha}{}_{\beta})_{,\alpha} = 0 \tag{24}$$

mit

$$T^{\alpha}{}_{\beta} = L\,\delta^{\alpha}{}_{\beta} - \phi^{\alpha\kappa}\sum_{A=1}^{N} f_{\beta\kappa}(A) - \phi_{\beta\kappa}\sum_{A=1}^{N} f^{\alpha\kappa}(A) - \\ - \sum_{A \neq B} f^{\alpha\kappa}(A)\, f_{\beta\kappa}(B) \tag{25}$$

und

$$\theta^{\alpha}{}_{\beta} = \sum_{A=1}^{N} \int ds\, m(A)\,\dot{X}^{\alpha}(A)\,\dot{X}_{\beta}(A)\,\big(\delta x^{\kappa} - X^{\kappa}(A)\big) \tag{26}$$

Wenn wir annehmen können, daß die Weltlinie eines Teilchens, zum Beispiel des Teilchens mit Index N, ganz außerhalb des betrachteten Raum-Zeit Gebietes liegt, so kann $f^{\alpha\beta}(N)$ als zusätzliches äußeres Feld betrachtet werden. Wir können nämlich alle Produkte von $f^{\alpha\beta}(N)$ und $\phi^{\alpha\beta}$ in Gl. (25) gesondert behandeln, da diese Größen zusammen und unabhängig von den anderen Variablen Erhaltungssätzen genügen. Jedes Glied in (25) der Form $f^{\alpha\beta}(N)\, f^{\kappa\lambda}(A)$ mit $A \neq N$ kann mit einem Glied $\phi^{\alpha\beta}\, f^{\kappa\lambda}(A)$ zusammengefaßt werden und $f^{\alpha\beta}(N)$ erscheint dann tatsächlich als zusätzliches äußeres Feld.

2. Einige einfache Beispiele

Da wir in diesem Abschnitt nie mehr als zwei Partikel betrachten werden, wollen wir eine einfachere Bezeichnungsweise einführen. Wir wollen die Massen mit m und μ, die Ladungen mit e und η, die entsprechenden Feldstärken mit $E^{\alpha\beta}$ und $F^{\alpha\beta}$ und schließlich die Weltlinien mit X^{α} und Y^{α} bezeichnen.

Die MAXWELLschen Gleichungen (21) haben sicher die retardierten Feldstärken

$$E^{\alpha\beta} = -e/4\pi \cdot [\dot{X}^\lambda(x_\lambda - X_\lambda)]^{-2}\{\ddot{X}^\beta(x^\alpha - X^\alpha) - \ddot{X}^\alpha(x^\beta - X^\beta) + \\ + [1 - \ddot{X}^\lambda(x_\lambda - X_\lambda)]\,[\dot{X}^\lambda(x_\lambda - X_\lambda)]^{-1}\,[\dot{X}^\beta(x^\alpha - X^\alpha) - \dot{X}^\alpha(x^\beta - X^\beta)]\} \tag{27}$$

als Lösungen, worin alle $X^\alpha(s)$ und deren Ableitungen im retardierten Punkt einzusetzen sind

$$x^0 - X^0(s_R) = [|\mathfrak{x} - \mathfrak{X}(s_R)|^2]^{1/2} \tag{28}$$

Andere Lösungen sind die avancierten Feldstärken oder geeignete Linearkombinationen der beiden und schließlich können noch willkürliche Lösungen der homogenen Gleichung hinzugefügt werden. Der Ausdruck (27) besteht bekanntlich aus einen geschwindigkeitsabhängigen Teil, der auch die statische Lösung enthält und einem Teil der proportional der Beschleunigung ist und wie r^{-1} in großer Entfernung abfällt. In der Umgebung der Weltlinie der Partikel überwiegt der statische Teil, der auf der Weltlinie eine r^{-2} Singularität hat. Solange also zwei oder mehr Partikel nicht koinzidieren, werden alle Komponenten des Energie-Impulstensors in jedem endlichen Raum-Zeitgebiet integrabel sein. Wir werden sogar einen endlichen Wert der Feldenergie in einer unendlich kleinen Kugel, die das Teilchen einschließt, erwarten, da aber dieser endliche Wert vom äußeren Feld oder vom Feld der anderen Teilchen abhängt, können wir diese Feldenergie nicht als zum herausgegriffenen Teilchen gehörend betrachten. Eine Schwierigkeit tritt nun aber auf, wenn wir die Gesamtenergie im Raume berechnen wollen. Das Beschleunigungsfeld in (27) konvergiert nicht rasch genug. Wir könnten uns helfen, indem wir an Stelle der MAXWELLschen Gleichungen die YUKAWA-Gleichungen der vektoriellen Mesonentheorie verwenden. Wir werden aber später sehen, daß diese Schwierigkeit nicht ganz so ernst ist, als es zunächst erscheinen könnte. Aber ganz abgesehen von der Diskussion dieses Problems im nächsten Abschnitt, dürfte man vielleicht eine Abhilfe durch entsprechende Annahmen über die Raum-Zeitstruktur im großen erhoffen.

Wir betrachten zunächst den Fall eines geladenen Teilchens im vorgegebenen Feld $\phi^{\alpha\beta}$. Wir nehmen für dieses Feld eine Wellengruppe, die während einer gewissen Zeitdauer eine harmonische Welle genügend genau approximiert. Das Teilchen wird nun eine beschleunigte Bewegung ausführen und entsprechend der Gl. (27) elektromagnetische Wellen ausstrahlen. Die Rechnung verläuft ganz wie in der üblichen Theorie, jedoch fehlt hier die Reaktionskraft der Strahlung, die aber in diesem Problem wenig wichtig ist[4]. Ein Unterschied dieser Theorie und der gewöhnlichen Theorie besteht aber darin, daß die ausgestrahlten Wellen keine Energie mitführen. Die Komponenten von (8) verschwinden in großer Entfernung, wenn nur $\phi_{\alpha\beta}$ genügend rasch abnimmt.

[4] W. HEITLER, The Quantum Theory of Radiation, Oxford University Press, Third Edition, 1954, p. 34.

Da die Feldstärken aber allein meßbar sind, wird die Wirkung der ausgestrahlten Wellen auf einen Empfänger dieselbe wie in der gewöhnlichen Theorie sein. Die Feldenergie wird also hier wie eine Art potentieller Energie betrachtet, was auch schon dadurch zum Ausdruck kommt, daß diese Energie nicht positiv definit ist. Bevor die einfallende Wellengruppe auf das Teilchen einwirkt, sind die Energie-Impulsgrößen des Teilchens unabhängig von den entsprechenden Größen des Feldes konstant. Die Feldenergie hängt nach (8) von den Feldstärken des einfallenden Wellenzuges und den von der Partikel erzeugten Feldstärken ab. Diese Feldenergie wird nun in kinetische Energie umgewandelt, sobald das äußere Feld auf das Teilchen einwirkt. Das letztere wird beschleunigt und erzeugt ein Strahlungsfeld, das aber die Energiebilanz nur dort beeinflußt, wo das äußere Feld noch endlich ist. Ist nun die Wellengruppe an der Partikel vorbeigeströmt, so wird die Partikelenergie wieder unabhängig von der Feldenergie erhalten bleiben. Die Partikel muß sich also in gleichförmiger Bewegung befinden, aber ihre kinetische Energie kann natürlich verschieden von der am Anfang sein. Die ausgestrahlte Welle kann gemessen werden, indem wir ein zweites Teilchen verwenden und der Vorgang ist natürlich derselbe wie zuvor.

Wir wollen nun solche Vorgänge betrachten, für die nach der herkömmlichen Theorie die Reaktionskraft der Strahlung von Einfluß ist. Die Erklärung der natürlichen Linienbreite und der Dispersion sind wohl die wichtigsten Beispiele. Wir betrachten zunächst zwei Teilchen ohne äußeres Feld. Die exakten Bewegungsgleichungen sind

$$\begin{aligned} m\, d^2X_\beta/ds^2 &= e\, dX^\alpha/ds \cdot F_{\alpha\beta} \\ \mu\, d^2Y_\beta/ds^2 &= \eta\, dX^\alpha/ds \cdot E_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{29}$$

und der Energie-Impulstensor des Feldes ist in der vereinfachten Schreibweise

$$T^\alpha{}_\beta = \frac{1}{2}\,\delta^\alpha{}_\beta(F^{\lambda\kappa}E_{\lambda\kappa}) - E^{\alpha\kappa}F_{\beta\kappa} - F^{\alpha\kappa}E_{\beta\kappa} \tag{30}$$

und die Energiedichte ist daher durch

$$T^{00} = \frac{1}{2}\sum_\alpha \sum_\beta E^{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \tag{31}$$

gegeben, während der Poyntingvektor nun

$$T^{01} = -\,(E^{02}F^{12} + F^{02}E^{12} + E^{03}F^{13} + E^{13}F^{03}) \tag{32}$$

$$\ldots$$

lautet.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß die Masse eines Teilchens, zum Beispiel μ, unendlich groß ist. Das Feld $F^{\alpha\beta}$ ist dann das COULOMB-Feld und das leichte Teilchen beschreibt eine relativistische KEPLER-Bewegung[5]. Dementsprechend wird es ein Strahlungsfeld erzeugen,

[5] Siehe zum Beispiel W. H. MCCREA, Relativity Physics, Methuen & Co. London, 2nd edition, 1947, pp. 29—31.

mit dem aber wieder kein Energietransport durch eine unendlich große Kugel verknüpft ist. Die gesamte Feldenergie divergiert wie $\log R$, wenn R den Radius einer großen Kugel bezeichnet. Wir bemerken aber, daß alle Komponenten des Energie-Impulstensors periodische Funktionen der Zeit sind. Wir können leicht aus (30) einen Energiesatz ableiten. Wir finden

$$T^{\alpha}{}_{\beta,\alpha} = E_{\beta\kappa} j^{\kappa} + F_{\beta\kappa} i^{\kappa} \tag{33}$$

wo j^{κ} den Stromvektor des Teilchens μ und i^{κ} den Stromvektor des Teilchens m bezeichnen. Nehmen wir an, daß das Teilchen μ ständig ruht, so verschwindet der erste Teil der rechten Seite für $\beta = 0$. Bezeichnen wir das zu $F^{\alpha\beta}$ gehörende Vektorpotential mit φ_{α}, so ergibt sich aus (33)

$$\left\{ T^{\alpha}{}_{0} + \int ds\, e \varphi_{0} \dot{X}^{\alpha}\, \delta(x^{\kappa} - X^{\kappa}) \right\}_{,\alpha} = 0 \tag{34}$$

was mit dem üblichen Energiesatz wegen (12) übereinstimmt.

Da also das System keine Energie verliert, wird das dynamische System stabil bleiben. Trotzdem strahlt das Elektron ständig und diese Strahlung kann natürlich mit Hilfe eines Teilchens in großer Entfernung gemessen werden. Man wird gegen diese Beschreibung des Strahlungsvorganges einwenden, daß sie den elementaren thermodynamischen Vorgängen nicht gerecht wird. Es ist aber aus (25) ersichtlich, daß eine Energieabsorption und -emission vorkommen kann, sobald zwei oder mehr beschleunigte Elektronen vorkommen, wobei ein beschleunigtes Elektron gegebenenfalls durch ein äußeres Feld ersetzt werden kann. Die Felder aller beschleunigten Elektronen zusammen geben also einen Energiestrom in großer Entfernung und die verlorene oder gewonnene Energie wird durch eine entsprechende Änderung der kinetischen Energien der Elektronen kompensiert. Eine genauere Theorie auf klassischer Grundlage wäre sicher von geringem Nutzen, da schon die diskreten Frequenzen der emittierten Strahlung nicht erklärbar sind. Wir wollen diese Fragen teilweise im nächsten Abschnitt zu beantworten versuchen.

Das Problem wird viel komplizierter, wenn die endliche Masse in Betracht gezogen wird. Beide Teilchen führen nun beschleunigte Bewegungen aus und die Energiedichte fällt nur mehr wie r^{-2} in großer Entfernung ab. Die Bewegung der zwei Teilchen ist im allgemeinen Falle sehr kompliziert, aber man wird annehmen können, daß alle Effekte, die den allgemeinen Fall von dem obigen speziellen unterscheiden, wie μ^{-1} im Grenzwert gegen Null streben. Selbst wenn eine endliche Linienbreite in diesem Falle erklärt werden könnte, würde sie sicher nicht mit der beobachteten natürlichen Linienbreite übereinstimmen, da die letztere nicht in der angegebenen Weise von der Masse des Atomkernes abhängt[6]. Man könnte damit die hier behandelte Theorie als widerlegt betrachten, aber man kann vielleicht auch an-

[6] l. c. 3.

nehmen, daß Zerfallprozesse bereits in das Gebiet der Quantenmechanik gehören und eine klassische Erklärung gar nicht erwartet werden kann. Man kann sich zum Beispiel auf den Tunneleffekt berufen.

Als nächstes Problem wollen wir die induzierte Emission behandeln. Wir werden dieselben Bezeichnungen wie bisher benützen, müssen aber nun auch ein äußeres Feld $\phi^{\alpha\beta}$ hinzufügen, das die Schwingungen des Elektrons anregt. Das Fehlen der Reaktionskraft der Strahlung wird auch hier wieder Abweichungen von der üblichen Theorie zur Folge haben. Wir nehmen an, daß die Masse μ unendlich groß ist und brauchen daher nur die Bewegungsgleichung des Elektrons

$$m\, d^2X_\beta/ds^2 = e\, dX^\alpha/ds\, (F_{\alpha\beta} + \phi_{\alpha\beta}) \tag{35}$$

berücksichtigen. Die von dem Elektron emittierte Strahlung ist wieder durch (27) gegeben, aber die beobachtete Strahlung in großer Entfernung ist die Summe von $E^{\alpha\beta}$ und $\phi^{\alpha\beta}$ und in kleiner Entfernung von dem Atom kommt noch das COULOMB-Feld $F^{\beta\alpha}$ hinzu. Die Differentialgleichung (35) kann man näherungsweise lösen und man erhält natürlich, abgesehen von der Dämpfung, dieselben Resultate wie in der gewöhnlichen Theorie. Im Falle der Resonanz sind diese Näherungsmethoden nicht mehr anwendbar, aber wir können auch ohne einer genaueren Untersuchung einsehen, daß das Fehlen der Dämpfungskraft hier ein „unphysikalisches" Resultat zur Folge hat. Erinnert man sich aber, daß die Berücksichtigung der Reaktionskraft in mathematisch befriedigender Weise auch zu unphysikalischen Lösungen Anlaß gibt[7], die vielleicht noch schwerer wiegen, so wird man das Versagen dieser Theorie in demselben Punkte vielleicht weniger bedenklich finden.

Der Einfluß der Dämpfung ist bekanntlich für die Erklärung der Absorption der Strahlung von Wichtigkeit. Zwar kann die Gesamtabsorption der Energie wie in dem erwähnten Buch von HEITLER[8] berechnet werden, die Form der Absorptionslinien hängt aber wesentlich von der Dämpfungskraft ab. Natürlich kann man eine Dämpfungskraft, ebenso wie eine rücktreibende Molekularkraft, ohne Bezugnahme auf elektromagnetische Gesetze einführen.

Wir möchten zum Abschluß dieses Abschnittes noch auf einen Umstand hinweisen, der auch diese Theorie von der üblichen unterscheidet. Nach (35) kann es vorkommen, daß das auf ein Partikel wirkende Feld verschwindet, ohne daß das elektromagnetische Feld selbst verschwindet. Die Feldenergie kann also verschieden von Null sein. Absorption muß also nicht immer Energieabsorption sein, da man hier auch von einer Absorption des Feldes sprechen könnte. Dieser Gebrauch des Wortes wäre sogar richtiger, da die Feldstärken, nicht aber die Energien direkt meßbar sind. Allerdings spielen die Energien die wichtigere Rolle in thermodynamischen Fragen. Sind aber diese Energien dynamisch nicht wirksam, so kann man sie einfach weglassen, genau so wie wir die Feld-

[7] P. A. M. DIRAC, Proc. Roy. Soc. A **167**, 148 (1938). Eine Zusammenfassung findet man bei C. I. ELIEZER, Rev. Mod. Phys. **19**, 147 (1947).

[8] l. c. 3, pp. 36–38.

energie eines äußeren Feldes wegen der Gl. (6) weggelassen haben. Natürlich wäre es denkbar, daß diese Energien die Raumkrümmung beeinflussen, aber wir wollen darauf nicht eingehen.

3. Absorption und Emission

Wir haben schon im vorigen Abschnitt auf die Existenz eines Energiestromes durch eine große Kugeloberfläche hingewiesen, wenn mindestens zwei beschleunigte Teilchen vorhanden sind. Wir wollen nun diese Energiedichte und den Energiestrom berechnen. Wir setzen den Ausdruck (27) und den äquivalenten Ausdruck für $F^{\alpha\beta}$ in die Gl. (30) ein. In großer Entfernung

$$|\mathfrak{x}| \gg |\mathfrak{X}|, \qquad |\mathfrak{x}| \gg |\mathfrak{Y}| \tag{36}$$

können wir nach (28)

$$x^\lambda - X^\lambda \sim x^\lambda - Y^\lambda \sim R^\lambda \tag{37}$$

setzen, wobei dann

$$R^\lambda R_\lambda = R_0{}^2 - R^2 = 0 \tag{38}$$

gilt. Wir vernachlässigen also die Unterschiede der Retardierung.

Die LAGRANGE-Funktion des Feldes ist dann gleich

$$L = -e\eta/(4\pi)^2 \cdot [\dot{X}^\lambda R_\lambda]^{-2} [\dot{Y}^\lambda R_\lambda]^{-2} \tag{39}$$

und dieser Ausdruck ist über ein unendliches Raumgebiet integrabel. Die Energiedichte enthält Glieder von der Ordnung R^{-4}, R^{-3} und R^{-2}. Schreiben wir

$$T^{00} = -e\eta/(4\pi)^2 \cdot [\dot{X}^\lambda R_\lambda]^{-2} [\dot{Y}^\lambda R_\lambda]^{-2} \cdot \{I_4 + I_3 + I_2\} \tag{40}$$

so ergibt sich für die Klammerausdrücke

$$\begin{aligned} I_4 &= 1 + 2R^2 [\dot{X}^\lambda R_\lambda]^{-1} [\dot{Y}^\lambda R_\lambda]^{-1} - \\ &- 2\dot{X}^0 R [\dot{X}^\lambda R_\lambda]^{-1} - 2\dot{Y}^0 R [\dot{Y}^\lambda R_\lambda]^{-1} \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= 2R\{\dot{X}^0 (\ddot{X}^\kappa R_\kappa)(\dot{X}^\lambda R_\lambda)^{-1} + \dot{Y}^0 (\ddot{Y}^\kappa R_\kappa)(\dot{Y}^\lambda R_\lambda)^{-1} + \\ &+ R(\ddot{X}^\kappa \dot{Y}_\kappa)(\dot{Y}^\lambda R_\lambda)^{-1} + R(\ddot{Y}^\kappa \dot{X}_\kappa)(\dot{X}^\lambda R_\lambda)^{-1} - \ddot{X}^0 - \ddot{Y}^0 - \\ &- R(\dot{X}^\kappa \dot{Y}_\kappa)(\dot{X}^\alpha R_\alpha)^{-1}(\dot{Y}^\lambda R_\lambda)^{-1}[(\ddot{Y}^\kappa R_\kappa) + (\ddot{X}^\kappa R_\kappa)]\} \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= 2R^2\{\ddot{X}^\kappa \ddot{Y}_\kappa + (\dot{X}^\kappa \dot{Y}_\kappa)(\ddot{X}^\lambda R_\lambda)(\ddot{Y}^\lambda R_\lambda)(\dot{X}^\alpha R_\alpha)^{-1}(\dot{Y}^\beta R_\beta)^{-1} - \\ &- (\ddot{Y}^\lambda R_\lambda)(\ddot{X}^\kappa \dot{Y}_\kappa)(\dot{Y}^\alpha R_\alpha)^{-1} - (\ddot{X}^\lambda R_\lambda)(\dot{X}^\kappa \ddot{Y}_\kappa)(\dot{X}^\beta R_\beta)^{-1}\} \end{aligned} \tag{43}$$

Ähnlich erhalten wir für den Energiestrom

$$T^{n0} = -e\eta/(4\pi)^2 \cdot [\dot{X}^\lambda R_\lambda]^{-2} [\dot{Y}^\kappa R_\kappa]^{-2} \cdot \{J_4{}^n + J_3{}^n + J_2{}^n\} \tag{44}$$

mit

$$\begin{aligned} J_4{}^n &= R^2 (\dot{X}^\lambda R_\lambda)^{-1} (\dot{Y}^\lambda R_\lambda)^{-1} \{R^n R^{-1} [2\dot{X}^\alpha \dot{Y}_\alpha - \\ &- \dot{X}^\alpha R_\alpha \dot{Y}^0 R^{-1} - \dot{Y}^\alpha R_\alpha \dot{X}^0 R^{-1}] - \\ &- \dot{X}^n (\dot{Y}^\beta R_\beta) R^{-1} - \dot{Y}^n (\dot{X}^\beta R_\beta) R^{-1}\} \end{aligned} \tag{45}$$

$$J_3{}^n = R\{R^n R^{-1}[(\ddot{Y}^\lambda R_\lambda)(\dot{Y}^\kappa R_\kappa)^{-1}\dot{Y}^0 + (\ddot{X}^\kappa R_\kappa)(\dot{X}^\lambda R_\lambda)^{-1}\dot{X}^0] -$$
$$+ 2R^n[(\dot{X}^\kappa \ddot{Y}_\kappa)(\dot{X}^\lambda R_\lambda)^{-1} + (\ddot{X}^\kappa \dot{Y}_\kappa)(\dot{Y}^\kappa R_\kappa)^{-1}] -$$
$$- 2R^n(\dot{X}^\kappa \dot{Y}_\kappa)(\dot{X}^\alpha R_\alpha)^{-1}(\dot{Y}^\beta R_\beta)^{-1}[\ddot{Y}^\kappa + \ddot{X}^\kappa]R_\kappa - \quad (46)$$
$$- \ddot{Y}^n - \ddot{X}^n - R^n R^{-1}\ddot{Y}_0 - \ddot{X}_0] -$$
$$+ \dot{Y}^n(\ddot{Y}^\kappa R_\kappa)(\dot{Y}^\kappa R_\kappa)^{-1} + \dot{X}^n(\ddot{X}^\lambda R_\lambda)(\dot{X}^\lambda R_\lambda)^{-1}\}$$

$$J_2{}^n = 2R^n R\{\ddot{X}^\kappa \ddot{Y}_\kappa + (\dot{X}^\kappa \dot{Y}_\kappa)(\ddot{X}^\lambda R_\lambda)(\ddot{Y}^\lambda R_\lambda)(\dot{X}^\alpha R_\alpha)^{-1}(\dot{Y}^\beta R_\beta)^{-1} -$$
$$- (\ddot{Y}^\lambda R_\lambda)(\ddot{X}^\alpha \dot{Y}_\alpha)(\dot{Y}^\beta R_\beta)^{-1} - (\ddot{X}^\lambda R_\lambda)(\ddot{Y}^\alpha \dot{X}_\alpha)(\dot{X}^\beta R_\beta)^{-1}\} \quad (47)$$

Diese Größen sind von entsprechender Ordnung wie die in der Energiedichte. Dies ist natürlich keineswegs überraschend in einer relativistischen Theorie, in der die Zeit gleichberechtigt mit den Raumkoordinaten ist. Vernachlässigt man die Retardierung, so kann das Verhalten der Komponenten des Energie-Impulstensors durch

$$T^{\alpha\beta} \sim [x^\alpha K_\alpha]^P \quad (48)$$

charakterisiert werden, worin K_α irgend ein Viervektor ist und P eine ganze Zahl. Der Erhaltungssatz

$$T^{0n}{}_{,n} + T^{00}{}_{,0} = 0 \quad (49)$$

zeigt dann die Korrespondenz der Größen mit verschiedenem P in den Komponenten T^{0n} und T^{00}. Diese Korrespondenz hat aber zur Folge, daß ein R^{-2}-Ausdruck im Energiestrom, der physikalisch sinnvoll ist, einen ähnlichen Ausdruck in der Energiedichte bedingt und der letztere führt zu einer unendlichen Gesamtenergie. Berechnet man nun den Mittelwert der Energiegrößen über zwei Kugeloberflächen mit Radien R_1 und R_2

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\left\{\int_{R_2} T^{00}\, d^{(3)}x - \int_{R_1} T^{00}\, d^3x\right\} + \int_{R_2} T^{0n}\, df_n - \int_{R_1} T^{0n}\, df_n = 0 \quad (50)$$

und setzt den gemittelten Energieverlust

$$\frac{1}{2}\left\{\int_{R_2} T^{0n}\, df_n + \int_{R_1} T^{0n}\, df_n\right\} \quad (51)$$

so erkennt man, daß der mikroskopische Strom wie R^{-4} abfallen muß, wenn die Größe (51) ein R^{-2}-Verhalten zeigen soll. Da der entsprechende Teil der Energiedichte zu einer endlichen Gesamtenergie führt, könnte man glauben, daß in einer endlichen Theorie nur solche Glieder vorkommen dürfen. Wir wollen auf dieses Argument jetzt nicht eingehen, da die Glieder I_2 und $J_2{}^n$ jedenfalls in dieser Theorie nicht entbehrt werden können. Die einfachste Ableitung des STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetzes[9] ist nämlich auch hier verwendbar, wenn

[9] Siehe zum Beispiel A. SOMMERFELD, Vorlesungen über Theoretische Physik, Band V, Thermodynamik und Statistik, Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1952, pp. 133—135.

man die, für die R^{-2}-Glieder gültige Beziehung

$$T^{0n}{}_2 = R^n/R \cdot T^{00}{}_2 \tag{52}$$

benützt. Wir betrachten einen Körper, in dem der Impuls, der von den Lichtwellen $E^{\alpha\beta}$ und $F^{\alpha\beta}$ zusammen geführt wird, vollkommen in mechanischen Impuls verwandelt wird. Wir müssen uns aber dabei erinnern, daß der Tensor $T^{\alpha\beta}$ selbst dem Divergenztheorem genügt und diese Größen also in einem formalen Wege erhalten bleiben. Die Wechselwirkung der Wellen $E^{\alpha\beta}$ und $F^{\alpha\beta}$ mit den Elektronen des betrachteten Körpers gibt aber Anlaß zu weiteren Komponenten von Feld-Energie und -Impuls und die obige Annahme der Absorption bedeutet also nur, daß ein zu $T^{\alpha\beta}$ äquivalenter Betrag vom Feld an die Partikel abgegeben wird.

Wir betrachten ein Oberflächenelement mit Normalenvektor i vom Betrage eins. Die Normalkomponente des Impulses ist durch das Skalarprodukt von T^{0n} mit i gegeben und um den pro Flächeneinheit aufgenommenen Impuls zu erhalten, müssen wir nochmals mit $(\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{i})/R$ multiplizieren, da der Querschnitt wegen des schiefen Einfalles entsprechend verkürzt ist. Die Impulsänderung ist also, wenn wir die Beiträge aller strahlenden Elektronenpaare addieren

$$\sum_{\underline{R}} (\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{i})^2/R^2 \cdot T^{00}{}_2 \tag{53}$$

Nehmen wir an, daß die Strahlung vollkommen homogen ist, so erhält ein anderes Einheits-Flächenelement des Körpers, sagen wir mit Normalenvektor j, denselben Impuls. Es folgt also für den Druck

$$\sum_{\underline{R}} (\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{i})^2/R^2 \cdot T^{00}{}_2 = \frac{1}{3} \sum_{\underline{R}} T^{00}{}_2 \tag{54}$$

und rein thermodynamische Betrachtungen liefern dann, wie Boltzmann gezeigt hat, das Stefan-Boltzmannsche Gesetz. Allerdings dürfen wir dabei einen wichtigen Umstand, der diese Theorie von der üblichen in fundamentaler Hinsicht unterscheidet, nicht übersehen: Die Energiedichte muß nämlich hier nicht positiv sein und anstatt eines Lichtdruckes könnte man unter Umständen einen Lichtzug erhalten. Wir wollen nun diese Schwierigkeiten etwas genauer betrachten.

Das Vorzeichen von $T^{00}{}_2$ hängt jedenfalls davon ab, ob die beiden Teilchen gleiche oder entgegengesetzte Ladungen haben. Wir wollen nun den Ausdruck I_2 in (43) näherungsweise berechnen. An Stelle der Eigenzeit wollen wir die Zeitkoordinate verwenden und nur die niedrigsten Potenzen in den Geschwindigkeiten beibehalten. Die Elektronenbahnen können näherungsweise als ebene Bahnen betrachtet werden und der Beschleunigungsvektor $\ddot{\mathfrak{x}}$ ist also

$$\ddot{\mathfrak{x}} = [\mathfrak{p} \cdot \dot{\mathfrak{x}}] \tag{55}$$

wo p ein konstanter Normalenvektor ist. Die Beschleunigung ist also proportional der Geschwindigkeit. Für die Energiedichte erhält man dann, wie erwartet, eine Dipol-Wechselwirkungsenergie

$$T^{00}{}_2 = 2\,e\,\eta/(4\pi)^2 \cdot [(\ddot{\mathfrak{x}} \cdot \ddot{\mathfrak{y}}) - (\mathfrak{R} \cdot \ddot{\mathfrak{x}})\,(\mathfrak{R}\,\ddot{\mathfrak{y}})/R^2] \tag{56}$$

die natürlich beiderlei Vorzeichen annehmen kann. Sind die beiden Elektronenbahnen vollkommen synchronisiert, das heißt, sind $\ddot{\mathfrak{x}}$ und $\ddot{\mathfrak{y}}$ gleich, so ist die Größe (56) positiv, sind $\ddot{\mathfrak{x}}$ und $\ddot{\mathfrak{y}}$ entgegengesetzt gleich, so ist (56) sicher negativ. Die am Anfang des zweiten Abschnittes erwähnte Divergenz der Gesamtenergie über den unendlichen Raum wird durch diesen Tatbestand wesentlich erleichtert. Für eine große Anzahl von strahlenden Atomen werden sich die positiven und die negativen Glieder der Energiedichte aufheben und der Energiegehalt wird wenigstens im Mittel endlich sein. Und man sieht sofort, daß dieser Umstand auch dann bestehen bleibt, wenn die allgemeinen Ausdrücke I_2 und I_3 verwendet werden, solange nur die Annahme (55) gemacht wird. Zu jedem Vektor $\mathfrak{p}$ wird es einen Vektor $-\mathfrak{p}$ geben und ein Paar von Gliedern dieser Art hebt sich auf. Eine allgemeine Elimination dieser Glieder kann man natürlich nicht erwarten.

Sind also alle Elektronenbahnen synchronisiert, so ergibt sich eine positive Energiedichte und, nach (52) eine Emission; können wir andererseits alle Elektronen in Paare teilen, so daß die zwei Elektronen jedes Paares entgegengesetzten Bewegungssinn haben, so haben wir ein System mit negativer Energie und Energieabsorption. Aber es besteht keine vollkommene Symmetrie in diesen beiden Fällen. Für $2N$ strahlende Elektronen haben wir im symmetrischen Fall $N(2N-1)$ positive Glieder im Energie-Impulstensor, aber im „anti-symmetrischen" Fall gibt es $N(N-1)$ Glieder mit positiver Energiedichte und N^2 Glieder mit negativer Energiedichte. Es ist selbstverständlich, daß ein System von Atomen und Elektronen zwar nicht im Prinzip aber doch in allen realistischen Fällen, auch nach dieser Theorie eine positive Gesamtenergie besitzt.

4. Eine halb-klassische Erweiterung

Wir wollen in diesem Abschnitt einen naheliegenden ersten Schritt zur Verbindung von Quantenmechanik und dieser Elektrodynamik vornehmen. Wenn auch diese Methode physikalisch ganz unbefriedigend ist und eigentlich auch nicht mehr zum Programm dieser Arbeit gehört, so kann sie doch als Illustration dienen.

Wir beschreiben ein Proton — oder allgemeiner einen Atomkern — als klassisches Teilchen, während das Elektron durch eine Wellenfunktion dargestellt werden soll. Für das Proton verwenden wir die Größen e, m, $X^\alpha(\tau)$, A_α, $E_{\alpha\beta}$ und für das Elektron η, μ, ψ, G_α, $F_{\alpha\beta}$, die γ-Matrizen sind durch

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha = 2\,g^{\alpha\beta} \tag{57}$$

definiert, und

$$\psi^+ = \psi^* \gamma^0 \tag{58}$$

Für die LAGRANGE-Funktion schreiben wir wieder (15) mit

$$L = \frac{1}{2} E^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \tag{59}$$

und

$$A = \int d\tau \, [m \sqrt{\dot{X}^\alpha \dot{X}_\alpha} - e \dot{X}^\alpha G_\alpha] \, \delta(x^\lambda - X^\lambda(\tau)) +$$

$$+ \frac{1}{2i} [\psi^+ \gamma^\alpha \psi_{,\alpha} - \psi^+{}_{,\alpha} \gamma^\alpha \psi] + \mu \psi^+ \psi - \eta \psi^+ \gamma^\alpha \psi A_\alpha \tag{60}$$

und man erhält dann sofort die Gleichungen

$$E^{\mu\nu}{}_{,\nu} = e \int d\tau \, \dot{X}^\mu \, \delta(x^\kappa - X^\kappa(\tau)) \tag{61}$$

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \eta \psi^+ \gamma^\mu \psi \tag{62}$$

$$m \ddot{X}_\alpha = e \dot{X}^\beta F_{\beta\alpha} \tag{63}$$

$$\gamma^\alpha [i \psi_{,\alpha} + \eta A_\alpha \psi] - \mu \psi = 0 \tag{64}$$

$$[i \psi^+{}_{,\alpha} - \eta A_\alpha \psi^+] \gamma^\alpha + \mu \psi^+ = 0 \tag{65}$$

Setzt man m gleich unendlich, so reduziert sich $E^{\alpha\beta}$ auf das COULOMB-Feld und ψ und ψ^+ sind dann die bekannten relativistischen COULOMB-Eigenfunktionen des diskreten oder kontinuierlichen Energiespektrums. Der Stromvektor in (62) ist für eine Eigenfunktion, die zu einem bestimmten Eigenwert gehört, zeit-unabhängig und daher ist auch $F^{\alpha\beta}$ zeit-unabhängig. Es werden also weder elektromagnetische Wellen, noch elektromagnetische Energie ausgesendet. Nun sieht man aber leicht ein, daß wir ψ und ψ^+ in (60) auch als verschiedene Funktionen betrachten können, ohne an den Feldgleichungen etwas zu ändern. Allerdings ist dann die LAGRANGE-Funktion nicht mehr reell, aber eine einfache Erweiterung von (60) würde auch diese Schwierigkeit beseitigen. In dieser allgemeineren Form besteht dann eine gewisse Ähnlichkeit zwischen elektromagnetischem Feld und Spinorfeld: Die LAGRANGE-Funktion ist linear in jeder Feldvariablen. Wir wollen aber darauf nicht weiter eingehen. Wichtig ist, daß eine Unterscheidung zwischen ψ und ψ^+ zu einem zeitabhängigen Strom in (62) führen kann, der dann zu einem Strahlungsfeld $F^{\alpha\beta}$ Anlaß gibt.

Mit den Bezeichnungen in (11) und (30) findet man

$$T^\alpha{}_{\beta,\alpha} + \theta^\alpha{}_{\beta,\alpha} + \eta \psi^+ \gamma^\mu \psi E_{\mu\beta} = 0 \tag{66}$$

und eine einfache Umformung zeigt

$$\eta \psi^+ \gamma^\alpha \psi E_{\alpha\beta} = \{\psi^+ \gamma^\alpha (i \psi_{,\beta} + \eta A_\beta \psi)\}_{,\alpha} \tag{67}$$

und, da die linke Seite reell ist, muß der Imaginärteil der rechten Seite identisch verschwinden und wir können das letzte Glied in (66) als die Divergenz des Tensors

$$\frac{1}{2i} (\psi^+{}_{,\beta} \gamma^\alpha \psi - \psi^+ \gamma^\alpha \psi_{,\beta}) + \eta \psi^+ \gamma^\alpha \psi A_\beta \tag{68}$$

bezüglich des Index α schreiben. Verlangt man, daß die ψ für alle sehr großen raum-artigen Entfernungen genügend rasch gegen Null konvergieren, so kann man wegen des Erhaltungssatzes

$$(\psi^+ \gamma^\alpha \psi)_{,\alpha} = 0 \tag{69}$$

stets

$$\int d^3x \, \psi^+ \gamma^0 \psi = 1 \tag{70}$$

setzen. Man braucht dazu nur (69) über ein vier-dimensionales Gebiet integrieren, wobei die zwei raum-artigen Grenz-Hyperflächen so zu legen sind, daß sie den drei-dimensionalen Gebieten $t = \text{const}$ und $t' = \text{const}$ in zwei verschiedenen Bezugssystemen entsprechen und die anderen Randgebiete im Unendlichen zu legen sind.

Der mathematische Formalismus ist zwar widerspruchsfrei aber nicht sehr ertragreich. Aber man kann an Hand dieser Gleichungen die oft gehörte Behauptung untersuchen, derzufolge man alle physikalischen Komponenten eines Systems „quantisieren" muß, sobald man eines „quantisiert" hat. Man glaubt nämlich, daß eine vollständige Messung der klassischen Komponente Rückschlüsse auf den Zustand der quantisierten Komponente erlauben würde, die der Beschränkung der Meßbarkeit widersprechen würde. Soweit wir an Hand des obigen Beispiels urteilen können, ist diese Vermutung — oder dieses Theorem — etwas zweifelhaft. Die Unschärferelationen sind ja schon in die Theorie eingebaut und können auch mit Hilfe noch so vieler Messungen an den klassischen Partikel, die mit dem quantisierten Teilchen in Wechselwirkung sind, niemals verletzt werden. Diese Vermutung ist allerdings in klarem Widerspruch mit PAULIS Abhandlung[10]. Eine genauere Untersuchung dieser Frage wäre schon wegen der nun aktuellen Frage der Quantentheorie der Gravitation von Interesse.

Jedenfalls können wir unser halb-klassisches Modell dazu benützen, die zu erwartenden Änderungen dieser Elektrodynamik durch eine Verbindung mit der Quantentheorie zu finden. Sind ψ und ψ^* Eigenlösungen der Energie, so wird die Gesamtenergie des Elektrons endlich und zeitunabhängig, und ebenso die Energie des elektromagnetischen Feldes. Sind aber ψ und ψ^* verschiedene Eigenlösungen der Energie, so verschwindet die Gesamtenergie des Elektrons wegen der Orthogonalität der Eigenfunktionen und wir erhalten elektromagnetische Wellen mit der richtigen, das heißt mit der BALMER-SOMMERFELD-Formel übereinstimmenden, Frequenz. Aber die Lichtwellen führen wieder keine Energie mit sich, solange kein zweites Strahlungsfeld vorhanden ist, also insbesondere das Proton eine gleichförmige Bewegung ausführt.

Mit diesen, reichlich qualitativen Bemerkungen wollen wir diesen Abschnitt schließen. Die Unzulänglichkeiten des halb-klassischen

[10] W. PAULI in Handbuch der Physik, Band V, Teil 1. Prinzipien der Quantenmechanik. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1958, p. 4.

Modells sind offensichtlich aber bevor man auf fundamentale Fragen eingehen kann wird man zu zeigen haben, daß die hier behandelte klassische Elektrodynamik, gegebenenfalls mit den qualitativen quantentheoretischen Modifikationen, auch der makroskopischen Physik gerecht werden kann.

5. Schlußbemerkungen

Die vorliegende Arbeit begann als eine Untersuchung über das klassische Selbstenergieproblem. In der Meinung des Verfassers war dabei besonders die Inkonsistenz des LAGRANGE-Formalismus ein merkwürdiges Rätsel. Aber es stellte sich bald heraus, was man natürlich sofort erwarten hätte können, daß das Selbstenergieproblem eigentlich ein thermodynamisches Problem ist. Denn die Ausstrahlung braucht man ja vornehmlich aus solchen Gründen und weder die NEWTONsche noch die SCHRÖDINGERsche Mechanik können solche Energieverluste als fundamentale Prozesse erklären. Dazu braucht man eben die Selbstkraft in der einen oder anderen Form. — Die thermodynamischen Fragen, die also in diesem Zusammenhang von großer Wichtigkeit sind, wurden in dieser Arbeit nicht behandelt. Aber wir glauben, daß eine konsistente Theorie des Elektrons auch dann von Interesse ist, wenn sie weder die Theorie der Strahlung noch die der makroskopischen Körper in offensichtlicher Weise einschließt.

Den Anlaß zu dieser Arbeit gaben eine Reihe von Vorlesungen über Quantenelektrodynamik, die der Verfasser an dem Physikalischen Institut der Universität in Tuscaloosa, Alabama, während des Winter-Semesters 1958—59 gab. Der Verfasser möchte hier den Professoren ARD, MOULTON und WHITEHURST, sowie Mrs. MOULTON, Mr. DOZIER, Mr. HASTY und Mr. COULTER für ihre Geduld, ihr Interesse und besonders für ihre gastliche Aufnahme danken.

On the Application of the Stability Theory of Differential Systems to the Stability of a Missile[1]

Part I

By

L. Pottsepp and M. Z. v. Krzywoblocki

University of Illinois, Urbana, Ill., U.S.A.

(*Received May 25, 1959*)

Introduction

The dynamic stability of aircraft, missiles, and spinning projectiles is a subject that has been studied at some length. About 1900, Lanchester began the study of dynamic stability of aircraft. In 1920, Fowler and his associates carried out a corresponding analysis for spin stabilized projectiles (see Ref. 3). The diverging interests of the two investigations resulted in adopting entirely different notations for these problems which have continued to the present time. In an effort to unify the two approaches, Charters (Ref. 3) in 1955 derived the classical results of dynamic stability of aircraft, spinning projectiles, and symmetrical missiles using common mathematical developments and a common nomenclature.

In the classical approach, the equations of motion are linearized by small perturbation techniques. The resulting equations are linear differential equations with constant coefficients, and the stability criteria are readily reducible from the solution of these equations.

The criteria of Fowler et al. were improved upon by McShane (Ref. 8), who considered the aerodynamic coefficients to be slowly varying function of the distance along the trajectory.

In recent years, the methods of non-linear mechanics (Poincaré, Liapunoff, Kryloff, Bogoliuboff, and others) have been applied to some problems in the stability of non-linear motion. For example, Murphy (Ref. 9) investigated the motion of a missile acted upon by non-linear forces and moments.

[1] This paper was originated from the doctoral dissertation submitted by Dr. L. Pottsepp under the direction of the senior author as a partial fulfillment of the requirements toward the Ph. D. Degree at the University of Illinois, Urbana, Illinois, U.S.A.

The present investigation treats with the stability of motion of a missile possessing rotational symmetry and a plane of mirror symmetry. It is demonstrated that by utilizing well-known results from the stability theory of differential equations, it is possible to obtain stability criteria without solving the equations of motion. The applicable portions of the stability theory of differential equations are included. Whenever practicable, notations and conventions of ballistics are used.

1. Mathematical Fundamentals

1.1. Matrix Notation for Systems of Differential Equations

The present chapter will deal with some properties of solutions of the system of linear differential equations of the type

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, y_j, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots n, \tag{1.1.1}$$

where the coefficients $a_{ij}(t)$ are real functions, piecewise continuous over any finite subinterval; the independent variable t is to range over the interval $[0, \infty]$. Matrix notation will be used to allow a more systematic discussion of the results.

The column of n quantities

$$y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}, \tag{1.1.2}$$

where the y_i are real or complex, will be called a column matrix of order n.

The square array of n^2 quantities

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11}\, a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} & \ldots & \cdot \\ \vdots \quad \vdots & \quad \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{Bmatrix}, \tag{1.1.3}$$

where the elements a_{ij} may be real or complex, will be called a square matrix of order n. Whenever possible, the small letters w, y, z, will be used to denote column matrices, and the capital letters A, B, C, T, Y, Z, to denote square matrices.

The magnitude of a column matrix y is measured by the scalar quantity

$$||y|| = \sum_{i=1}^{n} |y_i|, \tag{1.1.4}$$

which is called the norm of y.

Analogously, for a square matrix A the magnitude

$$||A|| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|, \tag{1.1.5}$$

is called the norm of A. It may be readily verified that

$$\left.\begin{aligned} &||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||, \\ &||c_1 y|| = c_1 ||y||, \\ &\left\| \int y \, dt \right\| \leqslant \int ||y|| \, dt, \end{aligned}\right\} \tag{1.1.6}$$

where c_1 is a scalar, and

$$\left.\begin{aligned} &||A + B|| \leqslant ||A|| + ||B||, \\ &||A\,B|| \leqslant ||A||\,||B||, \\ &||A\,y|| \leqslant ||A||\,||y||, \\ &\left\| \int A \, dt \right\| \leqslant \int ||A|| \, dt. \end{aligned}\right\} \tag{1.1.7}$$

Letting $t = 0$ be the initial value of t, and using the definitions (1.1.2) and (1.1.3), the system of differential equations (1.1.1) may now be written in the simple and compact form

$$\frac{dy}{dt} = A\,y, \qquad y(0) = y_0. \tag{1.1.8}$$

1.2. Solution of a Homogeneous System of Linear Differential Equations with Constant Coefficients

This system satisfies

$$\frac{dy}{dt} = A\,y, \qquad y(0) = y_0, \tag{1.2.1}$$

where A is a constant matrix.

The solution of this system may be expressed in terms of the solution of the matrix equation

$$\frac{dY}{dt} = A\,Y, \qquad Y(0) = I, \tag{1.2.2}$$

where I denotes the identity matrix. It may be readily verified by differentiation that

$$y = Y\,y_0. \tag{1.2.3}$$

Hence, it is the matrix Y that plays the important part in investigating the solutions of (1.2.1). In addition, the representation (1.2.3) is useful in that the effect of initial conditions is clearly displayed. In analogy to the scalar equation $du/dt = a\,u$, equation (1.2.2) satisfies

$$Y = e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}, \tag{1.2.4}$$

where $A^0 = I$, and the series above converges uniformly in any finite interval (Ref. 1, p. 13).

Assuming the characteristic roots of A to be distinct (this will be the only type of constant coefficient matrix considered in the present work), the matrix Y may be expressed in a particularly simple form. In this case, it can be shown that there exists a constant matrix T (Ref. 1, p. 18) with the property that

$$T^{-1} A T = \begin{Bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{Bmatrix} = \Lambda, \tag{1.2.5}$$

where T^{-1} denotes the inverse of T, and λ_i, $i = 1, 2, \dots n$, are the characteristic roots of A. With the substitution $Y = T Z$, equation (1.2.2) transforms into

$$\frac{dZ}{dt} = \Lambda Z, \qquad Z(0) = T^{-1}. \tag{1.2.6}$$

The solution is clearly

$$Z = \begin{Bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{Bmatrix} T^{-1}. \tag{1.2.7}$$

Hence,

$$Y = T \begin{Bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{Bmatrix} T^{-1}, \tag{1.2.8}$$

and using equation (1.2.3),

$$y = T \begin{Bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{Bmatrix} T^{-1} y_0. \tag{1.2.9}$$

1.3. The Behaviour of Solutions of $dy/dt = A\,y$ as $t \to \infty$.

From the explicit representation of y in equation (1.2.9), it is evident that if

$$R(\lambda_i) < 0, \qquad i = 1, 2, \dots n, \tag{1.3.1}$$

where $R(\lambda_i)$ denotes the real part of λ_i,

$$\lim_{t \to \infty} ||y|| = 0. \tag{1.3.2}$$

The condition (1.3.1) is not only necessary but also sufficient (Ref. 1, p. 25). Hence, the necessary and sufficient conditions that all solutions of (1.2.1) tend to zero as $t \to \infty$, where A has distinct characteristic roots, are that the real parts of the characteristic roots of A be negative.

1.4. The Concept of Stability for Systems of Linear Differential Equations

In this section the behaviour of solutions as $t \to \infty$ of equations of the type

$$\frac{dz}{dt} = \{A + B(t)\}\, z, \tag{1.4.1}$$

where A is a constant matrix and the matrix $B(t)$ is small as $t \to \infty$, will be considered.

As a result of the assumed smallness of $B(t)$ it appears reasonable to expect that the solutions of

$$\frac{dy}{dt} = A\, y \tag{1.4.2}$$

should share certain properties in common with the solutions of (1.4.1) as far as their behaviour as $t \to \infty$ is concerned. In addition, it may be anticipated that some properties will be preserved under a given class of the so-called perturbing matrices $B(t)$ but not under another.

These preliminary comments lead to the concept of stability for linear equations:

Definition of Stability. The solutions of

$$\frac{dy}{dt} = A\, y, \tag{1.4.3}$$

are stable with respect to a property P and under perturbation $B(t)$ of type Q if the solutions of

$$\frac{dz}{dt} = \{A + B(t)\}\, z \tag{1.4.4}$$

also possess property P. If not, the solutions of (1.4.3) are said to be unstable with respect to property P and under perturbations of type Q (Ref. 1, p. 34).

The property of interest here will be

$$\lim_{t \to \infty} ||y|| = 0, \tag{1.4.5}$$

and the class of matrices $B(t)$ under which the property (1.4.5) is preserved; that is

$$\lim_{t \to \infty} ||z|| = 0 \tag{1.4.6}$$

will be established in the following theorem:

Theorem 1. All solutions of (1.4.4) will approach zero as $t \to \infty$ if the same holds for all solutions of (1.4.3) provided that $||B(t)|| \leqslant c_1$ for $t \geqslant 0$, where c_1 is constant depending upon the elements of A (Ref. 1, p. 36).

In order to carry out the proof, the following lemma is needed:

Lemma 1. If $u(t)$ and $v(t)$ are two scalar functions such that $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ for $t \geqslant 0$, and if

$$u \leqslant c_1 + \int_0^t u(t)\, v(t)\, dt, \tag{1.4.7}$$

where c_1 is a positive constant, then

$$u \leqslant c_1 \exp\left(\int_0^t v(t)\, dt\right), \tag{1.4.8}$$

(Ref. 1, p. 35).

Proof of Theorem 1. Equation (1.4.4) satisfies the linear integral equation (Ref. 1, p. 36)

$$z = Y z_0 + \int_0^t Y(t-\tau)\, B(\tau)\, z(\tau)\, d\tau, \tag{1.4.9}$$

where

$$z_0 = z(0) \qquad \text{and } Y \text{ satisfies}$$

$$\frac{dY}{dt} = A\, Y, \qquad Y(0) = I. \tag{1.4.10}$$

From the explicit representation of $Y(t)$ in equation (1.2.8), it may be seen that if $||Y|| \to 0$ as $t \to \infty$, there exist constants $\alpha > 0$, $\beta > 0$ such that

$$||Y|| \leqslant \alpha\, e^{-\beta t} \qquad \text{for} \qquad t \geqslant 0. \tag{1.4.11}$$

Using the above, the inequalities (1.1.6), (1.1.7) and letting $||B(t)|| \leqslant c_1$, equation (1.4.9) gives

$$||z|| \leqslant \alpha\, ||z_0||\, e^{-\beta t} + \alpha\, c_1 \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)}\, ||z(\tau)||\, d\tau \tag{1.4.12}$$

or

$$||z||\, e^{\beta t} \leqslant \alpha\, ||z_0|| + \alpha\, c_1 \int_0^t e^{\beta\tau}\, ||z(\tau)||\, d\tau. \tag{1.4.13}$$

Applying Lemma 1, equation (1.4.13) yields

$$||z||\, e^{\beta t} \leqslant \alpha\, ||z_0||\, e^{\alpha c_1 t}, \tag{1.4.14}$$

or

$$||z|| \leqslant \alpha\, ||z_0||\, e^{(\alpha c_1 - \beta)t}. \tag{1.4.15}$$

From this relationship it is clear that if $c_1 < \beta/\alpha$, $||z|| \to 0$ as $t \to \infty$. Since α and β depend upon A, it readily follows that c_1 will depend upon A.

The results of Theorem 1 may be summarized as follows:

$$\lim_{t \to \infty} ||z|| = 0 \qquad \text{provided that}$$

(1) $$R(\lambda_i) < 0, \qquad i = 1, 2, \ldots n, \tag{1.4.16}$$

(2) $$||B(t)|| \leqslant c_1, \qquad c_1 < \frac{\beta}{\alpha}, \tag{1.4.17}$$

where α and β satisfy

$$||Y|| \leqslant \alpha e^{-\beta t} \qquad \text{for} \qquad t \geqslant 0. \tag{1.4.18}$$

1.5. Another Lemma

For later application (see Section 3.3), the following lemma is required:

Lemma 2. If a and b are two scalars $a > 0$, $b > 0$, and if $a - b > 0$, then

$$\sqrt{a - b} + \sqrt{a + b} < 2\sqrt{a}. \tag{1.5.1}$$

Proof. Since $a > b$,

$$a^2 - b^2 < a^2, \tag{1.5.2}$$

and

$$2\sqrt{a^2 - b^2} < 2a \tag{1.5.3}$$

or

$$2\sqrt{(a - b)(a + b)} < 2a. \tag{1.5.4}$$

Adding $a + b$ and $a - b$ to both sides of the above inequality

$$a + b + 2\sqrt{(a - b)(a + b)} + a - b < 4a. \tag{1.5.5}$$

Since the left hand side is now a perfect square,

$$\sqrt{a + b} + \sqrt{a - b} < 2\sqrt{a}. \tag{1.5.6}$$

2. Equations of Motion

2.1. Equations of Motion of a Rigid Body in a Body-Fixed Coordinate System

The vector equations of motion of a rigid body will be developed in a coordinate system fixed in the body. The derivation will be carried out in CARTESIAN tensor notation, utilizing the following conventions:

Range Convention.

When a small Latin subscript occurs unrepeated in a term, it is understood to take all of the values 1, 2, 3.

Summation Convention.

When a small Latin subscript is repeated twice in a term, summation with respect to that subscript is implied, the range of summation being 1, 2, 3.

Let $\bar{z}_r$ be a right-handed rectangular CARTESIAN coordinate system fixed to the earth, and assume the earth to be flat and to constitute an inertial frame of reference. In addition, let the positive $\bar{z}_2$ direction be upward, and let $\bar{\lambda}_r{}^{(2)}$ be a unit vector pointing in this direction.

Assuming the aerodynamic and gravitational forces to be the only external forces acting on the body, NEWTON's Second Law of Motion may be written in the following form:

$$m \frac{d\bar{u}_r}{dt} = \bar{F}_r - m g \bar{\lambda}_r^{(2)}, \tag{2.1.1}$$

$$\frac{d\bar{h}_r}{dt} = \bar{M}_r, \tag{2.1.2}$$

$$\bar{u}_r = \frac{d\bar{Z}_r}{dt}, \tag{2.1.3}$$

where m denotes the mass of the body; g the gravitational constant; $\bar{u}_r$ the components of velocity of the center of mass; $\bar{F}_r$ the aerodynamic forces; $\bar{h}_r$ and $\bar{M}_r$ the angular momenta and the aerodynamic moments about the center of mass, respectively; $\bar{Z}_r$ the coordinates of the center of mass; and the bars denote the fact that the vectors are resolved in the inertial-fixed $\bar{z}_r$ coordinate system.

Letting z_r be a coordinate system fixed in the body with its origin at the center of mass, the two systems are connected by the transformation formulas

$$z_r = B_{rm} \bar{z}_m + B_r, \qquad \bar{z}_r = B_{mr} z_m + \bar{Z}_r, \tag{2.1.4}$$

with

$$B_{mr} B_{mq} = \delta_{rq}, \tag{2.1.5}$$

where B_{rm} are the direction cosines between the two sets of axes, B_r are the coordinates of the origin of the $\bar{z}_r$ system referred to the z_r system, and δ_{rq} is the KRONECKER delta, i.e.

$$\delta_{rq} = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad r = q, \\ 0 & \text{for} \quad r \neq q. \end{cases} \tag{2.1.6}$$

The vectors transform according to

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_r &= B_{mr} u_m, \\ \bar{F}_r &= B_{mr} F_m, \\ \bar{\lambda}_r^{(2)} &= B_{mr} \lambda_m^{(2)}, \end{aligned}\right\} \tag{2.1.7}$$

where the absence of bars denotes the components of vectors resolved in the body-fixed z_r system.

To transform equation (2.1.1) to the body-fixed coordinate system it is only necessary to use the vector transformation law (2.1.7). Equation (2.1.1) then becomes:

$$m \frac{d}{dt} (B_{mr} u_m) = B_{mr} F_m - m g B_{mr} \lambda_m^{(2)}. \tag{2.1.8}$$

Performing the indicated differentiation, multiplying the above by B_{qr} and using equation (2.1.5), one obtains

$$m \left(\frac{du_q}{dt} + u_m B_{qr} \frac{dB_{mr}}{dt} \right) = F_q - m g \lambda_q^{(2)}. \tag{2.1.9}$$

In Reference 11 (p. 165), it is shown that

$$B_{qr} \frac{dB_{mr}}{dt} = \omega_{mq}, \tag{2.1.10}$$

where ω_{mq} is the angular velocity tensor of the z_r frame relative to the $\bar{z}_r$ frame, and is related to the angular velocity vector ω_q by

$$\omega_{mq} = -\varepsilon_{qmn}\,\omega_n, \tag{2.1.11}$$

where ε_{qmn} is the permutation symbol defined by

$$\varepsilon_{qmn} = \begin{cases} 1 \text{ if } q\,m\,n \text{ is an even permutation of } 1, 2, 3, \\ -1 \text{ if } q\,m\,n \text{ is an odd permutation of } 1, 2, 3, \\ 0 \text{ if } q\,m\,n \text{ is not a permutation of } 1, 2, 3. \end{cases} \tag{2.1.12}$$

Using the above, equation (2.1.9) becomes

$$m \frac{du_r}{dt} = F_r + m\,(\varepsilon_{rmn}\,u_m\,\omega_n - g\,\lambda_r^{(2)}). \tag{2.1.13}$$

The transformation of the angular momentum equations (2.1.2) is accomplished in an analogous manner, and one obtains

$$\frac{dh_q}{dt} = M_q + \varepsilon_{qmn}\,h_m\,\omega_n. \tag{2.1.14}$$

From Reference 11 (p. 162),

$$h_q = I_{qm}\,\omega_m, \tag{2.1.15}$$

where I_{qm} is the moment of inertia tensor (constant). Equation (2.1.14) may now be written as

$$I_{qr} \frac{d\omega_r}{dt} = M_q + \varepsilon_{qmn}\,I_{mr}\,\omega_r\,\omega_n. \tag{2.1.16}$$

Choosing z_r axes to be the principal axes of inertia, $I_{mn} = 0$ for $m \neq n$, and the equation (2.1.16) reduces to

$$I_{11} \frac{d\omega_1}{dt} = M_1 + \omega_2\,\omega_3\,(I_{22} - I_{33}), \tag{2.1.17}$$

$$I_{22} \frac{d\omega_2}{dt} = M_2 + \omega_1\,\omega_3\,(I_{33} - I_{11}), \tag{2.1.18}$$

$$I_{33} \frac{d\omega_3}{dt} = M_3 + \omega_1\,\omega_2\,(I_{11} - I_{22}). \tag{2.1.19}$$

The above equations are the angular momentum equations of a rigid body in the Eulerian form (Ref. 12). An equation for $\lambda_r^{(2)}$ is still needed.

Multiplying both sides of (2.1.10) by B_{qn}, using (2.1.5), (2.1.11), and renaming subscripts, one has

$$\frac{dB_{rs}}{dt} = \varepsilon_{rmn}\,B_{ms}\,\omega_n. \tag{2.1.20}$$

From the vector transformation law

$$\lambda_r^{(2)} = B_{rm}\,\bar{\lambda}_m^{(2)}. \tag{2.1.21}$$

Since $\bar{\lambda}_r^{(2)}$ was chosen to be a unit vector in the direction of $\bar{z}_2$ axis, $\bar{\lambda}_r^{(2)} = (0, 1, 0)$, and (2.1.21) yields

$$\lambda_r^{(2)} = B_{r2}. \tag{2.1.22}$$

With this result, equation (2.1.20) reduces to

$$\frac{d\lambda_r^{(2)}}{dt} = \varepsilon_{rmn}\,\lambda_m^{(2)}\,\omega_n. \tag{2.1.23}$$

Using equations (2.1.22) and (2.1.7), equation (2.1.3) gives

$$\frac{d\bar{Z}_2}{dt} = \bar{u}_2 = B_{m2}\,u_m = \lambda_m^{(2)}\,u_m. \tag{2.1.24}$$

2.2. Equations of Motion of a Body Possessing an Angle θ, $0 < \theta < \pi$, of Rotational Symmetry and a Plane of Mirror Symmetry

Letting z_1 axis be the axis of symmetry for this body, $I_{22} = I_{33}$ and the equations of motion (2.1.13), (2.1.16), (2.1.23) and (2.1.24) reduce to

$$m\frac{du_1}{dt} = F_1 + m(u_2\,\omega_3 - u_3\,\omega_2) - m\,g\,\lambda_1^{(2)}, \tag{2.2.1}$$

$$m\frac{du_2}{dt} = F_2 + m(u_3\,\omega_1 - u_1\,\omega_3) - m\,g\,\lambda_2^{(2)}, \tag{2.2.2}$$

$$m\frac{du_3}{dt} = F_3 + m(u_1\,\omega_2 - u_2\,\omega_1) - m\,g\,\lambda_3^{(2)}, \tag{2.2.3}$$

$$I_{11}\frac{d\omega_1}{dt} = M_1, \tag{2.2.4}$$

$$I_{22}\frac{d\omega_2}{dt} = M_2 + \omega_1\,\omega_3\,(I_{22} - I_{11}), \tag{2.2.5}$$

$$I_{22}\frac{d\omega_3}{dt} = M_3 - \omega_1\,\omega_2\,(I_{22} - I_{11}), \tag{2.2.6}$$

$$\frac{d\lambda_r^{(2)}}{dt} = \varepsilon_{rmn}\,\lambda_m^{(2)}\,\omega_n, \tag{2.2.7}$$

$$\frac{d\bar{Z}_2}{dt} = \lambda_m^{(2)}\,u_m. \tag{2.2.8}$$

As the trajectory coordinates $\bar{Z}_1$ and $\bar{Z}_3$ are not required for stability analysis, equations for these coordinates have been omitted. The last equation (2.2.8) is essential because of the dependence of the aerodynamic forces and moments on the altitude $\bar{Z}_2$.

For convenience, the above system of equations will be transformed into a complex variable notation.

Letting

$$I_{11} = A, \qquad I_{22} = B, \tag{2.2.9}$$

$$u_2 + i\,u_3 = \xi, \qquad \omega_2 + i\,\omega_3 = \eta, \tag{2.2.10}$$

$$F_2 + i\,F_3 = \mathscr{F}, \qquad M_2 + i\,M_3 = \mathscr{M}, \tag{2.2.11}$$

$$\lambda_1^{(2)} = y_1, \qquad \lambda_2^{(2)} + i\,\lambda_3^{(2)} = \mathscr{Y}, \tag{2.2.12}$$

the previous equations are transformed into

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{F_1}{m} + \frac{i}{2}(\xi\bar{\eta} - \bar{\xi}\eta) - g\,y_1, \tag{2.2.13}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\mathscr{F}}{m} + i\,(u_1\eta - \omega_1\xi) - g\mathscr{Y}, \tag{2.2.14}$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{M_1}{A}, \tag{2.2.15}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\mathscr{M}}{B} - i\left(1 - \frac{A}{B}\right)\omega_1\eta, \tag{2.2.16}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{i}{2}(\mathscr{Y}\bar{\eta} - \bar{\mathscr{Y}}\eta), \tag{2.2.17}$$

$$\frac{d\mathscr{Y}}{dt} = i\,(y_1\eta - \omega_1\mathscr{Y}), \tag{2.2.18}$$

$$\frac{dZ_2}{dt} = u_1\,y_1 + \frac{1}{2}(\mathscr{Y}\bar{\xi} - \bar{\mathscr{Y}}\xi), \tag{2.2.19}$$

where $i = \sqrt{-1}$ and bars denote the complex conjugates.

2.3. Aerodynamic Forces and Moments Acting on a Missile With an Angle θ, $0 < \theta < \pi$, of Rotational Symmetry and a Plane of Mirror Symmetry

In numerous applications where the accelerations are sufficiently small it may be assumed that the aerodynamic forces and moments acting on a body depend only upon the linear velocity components u_i and the angular velocity components ω_i. Accordingly, it is assumed that the aerodynamic forces and moments may be expanded in power series in the arguments u_2, u_3, ω_2, ω_3 as follows:

$$F_m = \sum_{p,q,r,s=0}^{\infty} a_{mpqrs}\,u_2^{\,p}\,u_3^{\,q}\,\omega_2^{\,r}\,\omega_3^{\,s}, \tag{2.3.1}$$

$$M_m = \sum_{p,q,r,s=0}^{\infty} b_{mpqrs}\,u_2^{\,p}\,u_3^{\,q}\,\omega_2^{\,r}\,\omega_3^{\,s}, \tag{2.3.2}$$

where the coefficients a_{mpqrs} and b_{mpqrs} are dependent upon u_1, ω_1, air density ϱ, speed of sound a, and other aerodynamic parameters. In the case of a body possessing an angle θ, $0 < \theta < \pi$, of rotational symmetry and a plane of mirror symmetry, equations (2.3.1) and (2.3.2) may be considerably simplified. The implications of the above and other

types of symmetry have been extensively investigated in Reference 7. The applicable results are cited below. Assuming z_1 axis to be the axis of symmetry and assuming it to lie in the plane of mirror symmetry, one obtains from Reference 7

$$F_1 = a_{10000} + \ldots, \tag{2.3.3}$$

$$F_2 = a_{21000}\,u_2 + a_{20100}\,u_3 + a_{20010}\,\omega_2 + a_{20001}\,\omega_3 + \ldots, \tag{2.3.4}$$

$$F_3 = a_{31000}\,u_2 + a_{30100}\,u_3 + a_{30010}\,\omega_2 + a_{30001}\,\omega_3 + \ldots, \tag{2.3.5}$$

$$M_1 = b_{10000} + \ldots, \tag{2.3.6}$$

$$M_2 = b_{21000}\,u_2 + b_{20100}\,u_3 + b_{20010}\,\omega_2 + b_{20001}\,\omega_3 + \ldots, \tag{2.3.7}$$

$$M_3 = b_{31000}\,u_2 + b_{30100}\,u_3 + b_{30010}\,\omega_2 + b_{30001}\,\omega_3 + \ldots, \tag{2.3.8}$$

where the assumed rotational symmetry requires that

$$\begin{aligned} a_{21000} &= a_{30100}, & a_{20010} &= a_{30001}, \\ a_{20100} &= -\,a_{31000}, & a_{20001} &= -\,a_{30010}, \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

$$\begin{aligned} b_{21000} &= b_{30100}, & b_{20010} &= b_{30001}, \\ b_{20100} &= -\,b_{31000}, & b_{20001} &= -\,b_{30010}. \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

In addition, it is shown in Reference 7 that the coefficients displayed do not depend upon the orientation of the z_2 and z_3 axes with respect to the body.

Retaining only the linear terms, it is clear that the system of equations (2.3.3) through (2.3.8) may be written more compactly as

$$F_m = a_m + a_{m\alpha}\,u_\alpha + b_{m\beta}\,\omega_\beta, \tag{2.3.11}$$

$$M_m = d_m + d_{m\alpha}\,u_\alpha + e_{m\beta}\,\omega_\beta, \tag{2.3.12}$$

where $\alpha, \beta = 2, 3$ and repetition of subscripts implies summation as before. Using the symmetry relations (2.3.9) and (2.3.10), one has

$$F_1 = a_1, \tag{2.3.13}$$

$$F_2 = a_{22}\,u_2 + a_{23}\,u_3 + b_{22}\,\omega_2 + b_{23}\,\omega_3, \tag{2.3.14}$$

$$F_3 = -\,a_{23}\,u_2 + a_{22}\,u_3 - b_{23}\,\omega_2 + b_{22}\,\omega_3, \tag{2.3.15}$$

$$M_1 = d_1, \tag{2.3.16}$$

$$M_2 = d_{22}\,u_2 + d_{23}\,u_3 + e_{22}\,\omega_2 + e_{23}\,\omega_3, \tag{2.3.17}$$

$$M_3 = -\,d_{23}\,u_2 + d_{22}\,u_3 - e_{23}\,\omega_2 + e_{22}\,\omega_3. \tag{2.3.18}$$

The consequences of mirror symmetry are also discussed in Reference 7. The results are that the coefficients a_1, a_{22}, b_{23}, d_{23}, e_{22} are even functions of ω_1 whereas c_1, a_{23}, b_{22}, d_{22}, e_{23} are odd functions of ω_1. Using the ballistics notation of Nielsen and Synge (Ref. 8), the following system of aerodynamic coefficients is now adopted:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= -\,\varrho\,d^2\,u_1^2\,K_{DA}, & a_{22} &= -\,\varrho\,d^2 u_1\,K_N, \\ a_{23} &= -\,\varrho\,d^3\omega_1\,K_F, & b_{22} &= \varrho\,d^4\omega_1\,K_{XF}, \\ b_{23} &= -\,\varrho\,d^3 u_1\,K_S, \end{aligned}\right\} \tag{2.3.19}$$

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= -\,\varrho\,d^4 u_1\,\omega_1\,K_A, & d_{22} &= -\,\varrho\,d^4\omega_1\,K_T, \\ d_{23} &= \varrho\,d^3 u_1\,K_M, & e_{22} &= -\,\varrho\,d^4 u_1\,K_H, \\ e_{23} &= -\,\varrho\,d^5\omega_1\,K_{XT}, \end{aligned}\right\} \tag{2.3.20}$$

where ϱ denotes the density of air and d an appropriate characteristic length. In addition, all of the K's are now even functions of ω_1, and depend upon such parameters as the Mach number and the Reynold's number. Utilizing the definitions (2.3.19), (2.3.20) and the complex variable notation introduced in the previous section, the aerodynamic forces and moments may be written as

$$F_1 = -\varrho\, d^2 u_1^2 K_{DA}, \tag{2.3.21}$$

$$\mathscr{S} = -\varrho\, d^2 \{(u_1 K_N - i\, d\omega_1 K_F)\,\xi - (d^2\omega_1 K_{XF} - i\, du_1 K_S)\,\eta\}. \tag{2.3.22}$$

$$M_1 = -\varrho\, d^4 u_1 \omega_1 K_A, \tag{2.3.23}$$

$$\mathscr{M} = -\varrho\, d^3 \{(d\omega_1 K_T - i\, u_1 K_M)\,\xi + (du_1 K_H - d^2\omega_1 K_{XT})\,\eta\}. \tag{2.3.24}$$

2.4. Transformation of the Equations to a Non-Rotating Coordinate System

Adopting the convention of Reference 8, let the symbol J with a subscript be equal to the corresponding aerodynamic coefficient K multiplied by $\varrho\, d^3/m$, and let

$$\nu = \frac{\omega_1 d}{u_1}. \tag{2.4.1}$$

Introducing a new independent variable p defined by

$$p = \int_0^t \left(\frac{u_1}{d}\right) dt, \qquad \frac{d(\;)}{dt} = \frac{u_1}{d}\frac{d(\;)}{dp}. \tag{2.4.2}$$

The equations of motion together with the aerodynamic forces and moments may now be written as

$$\frac{du_1}{dp} = -u_1 J_{DA} + \frac{d}{u_1}\left\{\frac{i}{2}(\xi\bar{\eta} - \bar{\xi}\eta) - g\, y_1\right\}, \tag{2.4.3}$$

$$\frac{d\xi}{dp} = (-J_N + i\nu J_F)\,\xi + d(\nu J_{XF} + i J_S)\,\eta - i d\eta - i\nu\xi - g\frac{d\mathscr{Y}}{u_1}, \tag{2.4.4}$$

$$\frac{dv}{dp} = -\left(J_A \frac{d^2 m}{A} + \frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dp}\right)v, \tag{2.4.5}$$

$$\frac{d\eta}{dp} = (\nu J_T - i J_M)\frac{m}{B}\,d\xi + (-J_H + i\nu J_{XT})\frac{m}{B}\,d^2\eta - i\left(1 - \frac{A}{B}\right)\nu\eta, \tag{2.4.6}$$

$$\frac{dy_1}{dp} = \frac{i\,d}{2\,u_1}(\mathscr{Y}\bar{\eta} - \bar{\mathscr{Y}}\eta), \tag{2.4.7}$$

$$\frac{d\mathscr{Y}}{dp} = i\left(y_1\frac{d\eta}{u_1} - \nu\mathscr{Y}\right), \tag{2.4.8}$$

$$\frac{dZ_2}{dp} = y_1 d + \frac{d}{2\,u_1}(\mathscr{Y}\bar{\xi} - \bar{\mathscr{Y}}\xi). \tag{2.4.9}$$

Since the aerodynamic forces and moments do not depend upon the orientation of the z_2 and z_3 axes, it is expedient to transform the above equations into a non-spinning frame of reference as follows:

$$\lambda = \xi \exp\left(i \int_0^p \nu \, dp\right) \frac{1}{u_1}, \tag{2.4.10}$$

$$\mu = \eta \frac{d}{u_1} \exp\left(i \int_0^p \nu \, dp\right), \tag{2.4.11}$$

$$\gamma = g \mathscr{Y} \exp\left(i \int_0^p \nu \, dp\right), \tag{2.4.12}$$

$$g_1 = g \, y_1. \tag{2.4.13}$$

After performing the necessary manipulations, the transformed system becomes

$$\frac{du_1}{dp} = -u_1 J_{DA} + i \frac{u_1}{2} (\lambda \bar{\mu} - \bar{\lambda} \mu) - g_1 \frac{d}{u_1}, \tag{2.4.14}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dp} = &\left\{ J_{DA} - J_N + i \nu J_F - \frac{i}{2} (\lambda \bar{\mu} - \bar{\lambda} \mu) + g_1 \frac{d}{u_1^2} \right\} \lambda \\ &+ \{\nu J_{XF} + i (J_S + 1)\} \mu - \gamma \frac{d}{u_1^2}, \end{aligned}\right\} \tag{2.4.15}$$

$$\frac{d\nu}{dp} = \left(J_{DA} - J_A \frac{m d^2}{A} \right) \nu - i \frac{\nu}{2} (\lambda \bar{\mu} - \bar{\lambda} \mu) + \nu g_1 \frac{d}{u_1^2}, \tag{2.4.16}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mu}{dp} = &(-\nu J_T - i J_M) \frac{\lambda}{k^2} + \\ &+ \left\{ \frac{1}{k^2} (-J_H + i \nu J_{XT}) + J_{DA} + i \frac{A}{B} \nu - \frac{i}{2} (\lambda \bar{\mu} - \bar{\lambda} \mu) + g_1 \frac{d}{u_1^2} \right\} \mu, \end{aligned}\right\} \tag{2.4.17}$$

$$\frac{dg_1}{dp} = \frac{i}{2} (\gamma \bar{\mu} - \bar{\gamma} \mu), \tag{2.4.18}$$

$$\frac{d\gamma}{dp} = i g_1 \mu, \tag{2.4.19}$$

$$g \frac{d \bar{Z}_2}{dp} = g_1 d + \frac{1}{2} (\gamma \bar{\lambda} + \bar{\gamma} \lambda) d, \tag{2.4.20}$$

where k is the transverse radius of gyration in calibers defined by

$$k^2 = \frac{B}{m d^2}. \tag{2.4.21}$$

2.5. *The Normal Equations of Motion*

The systems of equations (2.4.14) through (2.4.20) are somewhat cumbersome from the standpoint of analyzing their stability. They will be simplified by the use of the so-called normal equations of motion. The latter are obtained by assuming that the drag expressed by $\varrho d^2 u^2 K_D$ is the only aerodynamic force acting on the body. They may be written as follows (Ref. 8):

$$\frac{du}{dt} = -\frac{u^2}{d} J_D - g \sin\theta, \tag{2.5.1}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -g \frac{\cos\theta}{u}, \tag{2.5.2}$$

$$\frac{dX}{dt} = u \cos\theta, \tag{2.5.3}$$

$$\frac{dY}{dt} = u \sin\theta, \tag{2.5.4}$$

where u denotes the magnitude of the resultant velocity, θ the angle between the horizontal and the tangent to the trajectory, X the horizontal distance, and Y the vertical distance.

Transforming the independent variable to p, equations (2.5.1) and (2.5.2) become

$$\frac{du}{dp} = -u J_D - g \frac{d}{u} \sin\theta, \tag{2.5.5}$$

$$\frac{d\theta}{dp} = -g \frac{d \cos\theta}{u^2}. \tag{2.5.6}$$

The equations of the previous section may be simplified by assuming that $u = u_1$ and using equations (2.5.5) and (2.5.6). The resultant equations of motion are

$$\frac{d\lambda}{dp} = \left(J_D - J_X + i\, v J_F + g \frac{d \sin\theta}{u^2}\right) \lambda - \{v J_{XF} + i (J_S - 1)\} \mu - \gamma \frac{d}{u^2}, \tag{2.5.7}$$

$$\frac{d\mu}{dp} = -(v J_T + i J_M) \frac{\lambda}{k^2} + \left\{\frac{1}{k^2}(-J_H + i v J_{XF}) + J_D + i \frac{A}{B} v - g \frac{d \sin\theta}{u^2}\right\} \mu, \tag{2.5.8}$$

$$\frac{dv}{dp} = \left(J_D - J_A \frac{m d^2}{A} + g d \frac{\sin\theta}{u^2}\right) v. \tag{2.5.9}$$

2.6. *Equations of Motion in Matrix Notation*

Letting

$$\lambda = \lambda_1 + i \lambda_2, \qquad \mu = \mu_1 + i \mu_2,$$
$$\gamma = \gamma_1 + i \gamma_2, \qquad g \frac{d \sin\theta}{u^2} = J_G, \tag{2.6.1}$$

equations (2.5.7) and (2.5.8) may be separated into their real and imaginary components yielding:

$$\frac{d\lambda_1}{dp} = (J_D - J_N + J_G)\,\lambda_1 - \nu\, J_F\,\lambda_2 + \nu\, J_{XF}\mu_1 - (J_S + 1)\,\mu_2 - \gamma_1 \frac{d}{u^2}, \tag{2.6.2}$$

$$\frac{d\lambda_2}{dp} = \nu\, J_F\,\lambda_1 + (J_D - J_N + J_G)\,\lambda_2 + (J_S + 1)\,\mu_1 + \nu\, J_{XF}\,\mu_2 - \gamma_2 \frac{d}{u^2}, \tag{2.6.3}$$

$$\frac{d\mu_1}{dp} = -\nu \frac{J_T}{k^2}\lambda_1 + \frac{J_M}{k^2}\lambda_2 + \left(J_D - \frac{J_H}{k^2} + J_G\right)\mu_1 - \nu\left(\frac{J_{XT}}{k^2} + \frac{A}{B}\right)\mu_2, \tag{2.6.4}$$

$$\frac{d\mu_2}{dp} = -\frac{J_M}{k^2}\lambda_1 - \nu \frac{J_T}{k^2}\lambda_2 + \left(J_D - \frac{J_H}{k^2} + J_G\right)\mu_2 + \nu\left(\frac{J_{XT}}{k^2} + \frac{A}{B}\right)\mu_1. \tag{2.6.5}$$

Letting

$$\left.\begin{aligned} a &= J_D - J_N + J_G, & b &= \nu\, J_{XF}, \\ c &= \frac{\nu\, J_T}{k^2}, & d &= J_D - \frac{J_H}{k^2} + J_G, \end{aligned}\right\} \tag{2.6.6}$$

$$\left.\begin{aligned} e &= \nu\, J_F, & f &= J_S + 1, \\ g &= \frac{J_M}{k^2}, & h &= \nu\left(\frac{J_{XT}}{k^2} + \frac{A}{B}\right), \end{aligned}\right\} \tag{2.6.7}$$

and introducing the matrices

$$w = \begin{Vmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_2 \end{Vmatrix}, \qquad C = \begin{Vmatrix} a & b & -e & -f \\ -c & d & g & -h \\ e & f & a & b \\ -g & h & -c & d \end{Vmatrix}, \qquad \delta = \begin{Vmatrix} -\gamma_1\,(d/u^2) \\ 0 \\ -\gamma_2\,(d/u^2) \\ 0 \end{Vmatrix}, \tag{2.6.8}$$

the system of equations (2.6.2), (2.6.3), (2.6.4) and (2.6.5) becomes

$$\frac{dw}{dp} = C\,w + \delta. \tag{2.6.9}$$

Considering ν and δ to be known functions of p, the above system is sufficient to describe the motion of the body. As has been pointed out previously, the aerodynamic coefficients as well as the gravity coefficient J_G are not, as a rule, constant in any given problem but depend upon ω_1, u_1, REYNOLD's number, MACH number, and other aerodynamic parameters. These parameters are functions of p. Hence, without loss of generality, all of the J's and the spin ν may be taken to be functions of p of the form

$$\left.\begin{aligned} \nu &= \nu_0 + \nu'(p), \\ J &= J_0 + J'(p), \end{aligned}\right\} \tag{2.6.10}$$

where ν_0 and J_0 are constant.

As a result of the above assumption, the coefficient matrix C takes the form

$$C = A + B(\not{p}), \tag{2.6.11}$$

where A is a constant matrix. Carrying out the detailed computations, one finds that

$$A = \begin{Vmatrix} a_0 & b_0 & -e_0 & -f_0 \\ -c_0 & d_0 & g_0 & -h_0 \\ e_0 & f_0 & a_0 & b_0 \\ -g_0 & h_0 & -c_0 & d_0 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} a' & b' & -e' & -f' \\ -c' & d' & g' & -h' \\ e' & f' & a' & b' \\ -g' & h' & -c' & d' \end{Vmatrix}, \tag{2.6.12}$$

where

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= J_{D_0} - J_{N_0} + J_{G_0}, & b_0 &= \nu_0 J_{XF_0} \\ c_0 &= \nu_0 \frac{J_{T_0}}{k^2}, & d_0 &= J_{D_0} - \frac{J_{H_0}}{k^2} + J_{G_0}, \\ e_0 &= \nu_0 J_{F_0}, & f_0 &= J_{S_0} + 1, \\ g_0 &= \frac{J_{M_0}}{k^2}, & h_0 &= \nu_0 \left(\frac{J_{XT_0}}{k^2} + \frac{A}{B}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.6.13}$$

$$\left.\begin{aligned} a' &= J_D' - J_N' + J_G', & b' &= \nu J_{XF}' + \nu' J_{XF_0} \\ c' &= \frac{1}{k^2}(\nu J_T' + \nu' J_{T_0}), & d' &= J_D' - \frac{J_H'}{k^2} + J_G', \\ e' &= \nu J_F' + \nu' J_{F_0}, & f' &= J_S', \\ g' &= \frac{J_M'}{k^2}, & h' &= \nu \frac{J_{XT}'}{k^2} + \nu' \left(\frac{J_{XT_0}}{k^2} + \frac{A}{B}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2.6.14}$$

Using equation (2.6.11) and the assumption that $\delta = \delta(\not{p})$, equation (2.6.9) may be written as

$$\frac{dw}{d\not{p}} = \{A + B(\not{p})\}\, w + \delta(\not{p}). \tag{2.6.15}$$

Zur Brennfleckverschiebung eines paraxialen Ionenstrahles unter Berücksichtigung der Raumladungseinflüsse im Linsenbereich

Von

N. Pucker

Institut für theoretische Physik der Universität Graz

Mit 8 Abbildungen

(*Eingegangen am 25. Mai 1959*)

Zusammenfassung

Ausgehend von den Ergebnissen einer vorhergehenden Arbeit, in der die Raumladungsaufspaltung beim Durchgang durch eine rotationssymmetrische elektrostatische Linse mittels geeigneter Differentialgleichungen in Abhängigkeit von einfachen Linsenparametern erfaßt wurde, wird die Brennfleckbildung und Verschiebung untersucht. Die Ergebnisse werden an einem speziellen Beispiel illustriert.

1. Einleitung

In einer vorhergehenden Arbeit [1] wurde gezeigt, wie man den Einfluß der Raumladung auf die paraxialen Bahnen geladener Teilchen im elektrostatischen rotationssymmetrischen Feld günstig erfassen kann. Mit Hilfe einer Störungsrechnung erster Ordnung wurden die Differentialgleichungen für die durch die Raumladung bedingten Abweichungen von den ursprünglichen, ohne Beachtung der Raumladung berechneten Bahnen aufgestellt. In diesen Gleichungen tritt nur eine Abhängigkeit von der Geometrie der Anordnung und den Elektrodenspannungen auf.

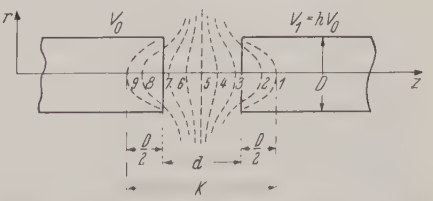

Abb. 1. Meridianschnitt durch eine uniforme Rohrlinse (nach U. Timm [2])

Das Linsenfeld wurde durch zwei uniforme Zylinderelektroden mit den Potentialen V_0 und $V_1 = h \cdot V_0$ verwirklicht.

Abb. 1 zeigt den Meridianschnitt durch eine solche Rohrlinse, wie er im elektrolytischen Trog aufgenommen wurde. Ist der Abstand d der beiden Zylinder gegen ihren Durchmesser klein, so wird

$$K = D$$

und man kann in erster Näherung, wie Elkind [3] gezeigt hat, das Achsenpotential nach Abb. 2 darstellen.

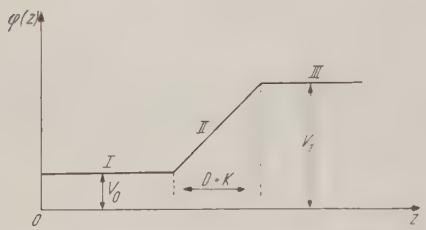

Abb. 2. Achsenpotential der Linse nach Elkind

Unter diesen Annahmen ergibt ein von U. Timm eingeführter Matrizenformalismus für die von der Raumladung ungestörten Bahnen in den drei angegebenen Bereichen unter Zugrundelegung geeigneter Anfangsbedingungen

$$r_I(z) = r_0 \qquad r_I'(z) = 0 \qquad \text{für} \qquad z < a; \tag{1}$$

$$r_{II}(z) = \frac{r_0}{2}\left(3 - \sqrt{\frac{h-1}{D}(z-a) - 1}\right) \tag{2 a}$$

$$r_{II}'(z) = -\,r_0\,\frac{h-1}{4D}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{h-1}{D}(z-a)+1}} \qquad \text{für} \qquad a < z < a + D; \tag{2 b}$$

$$r_{III}(z) = r_0\left[-\frac{3}{8D\cdot h}(h-1)\left(\sqrt{h}-1\right)(z-a-D) + \frac{1}{2}\left(3-\sqrt{h}\right)\right] \tag{3 a}$$

$$r_{III}'(z) = -\,r_0\,\frac{3}{8Dh}(h-1)\left(\sqrt{h}-1\right) \qquad \text{für} \qquad z > a + D. \tag{3 b}$$

Der zugehörige Brennpunkt liegt bei

$$z = a + D + \frac{4Dh}{3}\cdot\frac{(3-\sqrt{h})}{(h-1)\left(\sqrt{h}-1\right)} \tag{4}$$

für $0 \leqslant h < 9$. Für die weiteren Werte von $h > 9$ liegt er bereits innerhalb des Linsenfeldes.

Berechnet man die entsprechenden durch die Raumladung bedingten Abweichungen von den obigen ungestörten Bahnen, so ergibt sich

$$\delta\alpha = 0 \tag{5}$$

für alle drei Bereiche.

Die Abweichungen in der r-Richtung sind

$$\delta r_I = \frac{\pi j_0 r_0}{2\,|V_0|^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{2e}}\cdot z^2 = \frac{K r_0}{2}\cdot z^2, \tag{6 a}$$

$$\delta r_{II} = K \cdot r_0 \left\{ \frac{8 D^2}{3 (h-1)^2} \cdot \left[\sqrt{\frac{h-1}{D} (z-a) + 1} \cdot \right.\right.$$

$$\cdot \ln \sqrt{\frac{h-1}{D} (z-a) + 1} + \left(3 - \sqrt{\frac{h-1}{D} (z-a) + 1} \right) \cdot \qquad (6\,b)$$

$$\left.\left. \cdot \ln \left(3 - \sqrt{\frac{h-1}{D} (z-a) + 1} \right) \right] + \frac{a^2}{2} - \frac{24 D^2}{3 (h-1)^2} \ln 2 - \frac{2 a D}{(h-1)} + \right.$$

$$+ \frac{2 D}{(h-1)} \sqrt{\frac{h-1}{D} (z-a) + 1} \cdot \left(a + \frac{4 D \ln 2}{3 (h-1)} \right)$$

und

$$\delta r_{III} = \frac{8 K r_0 D}{9 \sqrt{h} (h-1)^2 (\sqrt{h} - 1)^2} \cdot \qquad (6\,c)$$

$$\cdot [-3 (h-1) (\sqrt{h} - 1) (z - a - D) + 4 D h (3 - \sqrt{h})] \cdot$$

$$\cdot \ln [-3 (h-1) (\sqrt{h} - 1) (z - a - D) + 4 D h (3 - \sqrt{h})] +$$

$$+ z \left(\text{konst}_1 + \frac{8 K r_0 D}{3 \sqrt{h} (h-1) (\sqrt{h} - 1)} \right) + \text{konst}_2.$$

Dabei wurde darauf hingewiesen, daß die Lösung (6 c) physikalisch unbrauchbar ist, da ihre erste Ableitung nach z im Brennpunkt der ungestörten Bahn [Gl. (4)] unendlich wird. Das hängt damit zusammen, daß in der Umgebung dieses Punktes die Voraussetzungen für die angewandte Störungsrechnung nicht mehr zutreffen.

Die Abweichungen δz in der z-Richtung können gegenüber den Abweichungen δr weitgehend vernachlässigt werden.

Ausgehend von diesen Ergebnissen soll nun auf die Abhängigkeit der Raumladungsaufspaltung von der Elektrodengeometrie und die Berechnung von Brennweite und Brennfleck der raumladungserfüllten Linse eingegangen werden. Im Anschluß daran werden die Ergebnisse auf ein spezielles Beispiel angewendet.

2. Abhängigkeit der Raumladungsaufspaltung vom Elektrodendurchmesser

Wie aus Abb. 2 hervorgeht, ist die Stärke des Linsenfeldes umgekehrt proportional dem Elektrodendurchmesser, das heißt, es ist zu erwarten, daß damit auch ein entsprechender Zusammenhang zwischen Raumladungsaufspaltung und Elektrodendurchmesser gegeben ist, dessen Kenntnis für Fragen der konkreten Linsendimensionierung von Wert sein könnte. Um diesen Umstand zu untersuchen, kann man die Aufspaltung an der Stelle $z = a + D$ betrachten. Aus Gl. (6 b) folgt dafür mit

$$K = \frac{\pi j_0}{|V_0|^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{2 e}} \qquad (7)$$

der Ausdruck

$$\delta r_{II}(a+D) = K r_0 \left\{ \frac{8 D^2}{3 (h-1)^2} \left[\sqrt{h} \cdot \ln \sqrt{h} + (3 - \sqrt{h}) \cdot \ln (3 - \sqrt{h}) \right] - \right.$$

$$\left. + \frac{2 D}{h-1} \sqrt{h} \left(a + \frac{4 D}{3 (h-1)} \cdot \ln 2 \right) + \frac{a^2}{2} - \frac{24 D^2 \ln 2}{3 (h-1)^2} - \frac{2 a D}{(h-1)} \right\}, \quad (8)$$

den man für den vorliegenden Zweck auch in der Form

$$\delta r_{II}(a+D) = \alpha D^2 + \beta D + \gamma = f(D) \quad (9)$$

schreiben kann. Ist nun

$$f'(D) = 2 \alpha D + \beta > 0, \quad (10)$$

so heißt das, daß

$$f(D) = \delta r_{II}(a+D)$$

mit wachsendem D monoton zunimmt. Da

$$\beta = \frac{2 a}{\sqrt{h} - 1} \geqslant 0$$

für $a \geqslant 0$ (11)

ist, braucht zur Verifikation von Gl. (10) nur gezeigt werden, daß für α ebenfalls

$$\alpha(h) \geqslant 0 \quad \text{für} \quad a \geqslant 0 \quad (12)$$

gilt. Wie aus Abb. 3, wo der Verlauf von $\alpha(h)$ für den Bereich $0 \leqslant h \leqslant 9$ dargestellt ist, hervorgeht, erfüllt $\alpha(h)$ tatsächlich die Bedingung (12) und somit ist bestätigt, daß mit zunehmendem Elektrodendurchmesser D die Raumladungsaufspaltung ebenfalls zunimmt.

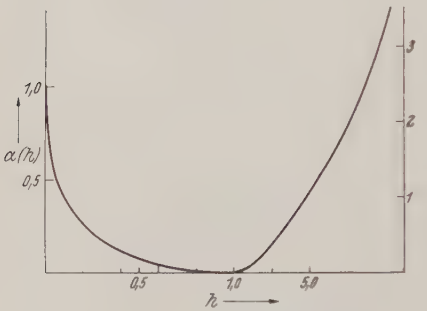

Abb. 3. Verlauf von $\alpha(h)$ im Bereich $0 \leqslant h < 9$

3. Berechnung von Brennweite und Brennfleck

Da Gl. (6 c) die Verhältnisse in der Umgebung des Brennpunktes der ungestörten Bahn (4) nicht mehr richtig beschreibt, muß man in anderer Weise vorgehen.

Bezeichnet man nämlich mit

$$r(z)$$

die ungestörte Bahn und mit

$$\tilde{r}(z) = r(z) + \delta r(z),$$

$$\tilde{r}'(z) = r'(z) + \frac{d}{dz}(\delta r) \quad (13)$$

die gestörte Bahn, und sei außerdem

$$r(a+D) = f \cdot r_0; \qquad \frac{d}{dz}[r(z)]_{z=a+D} = f' \cdot r_0 \quad (14)$$

$$\delta r(a+D) = g \cdot r_0; \qquad \frac{d}{dz}(\delta r)_{z=a+D} = g' \cdot r_0 \quad (15)$$

so kann man im Bereich *III* eine neue ungestörte Bahn bilden, die durch den Abstand

$$\bar{r}(a+D) = r_0(f+g) \tag{16}$$

und durch die Neigung

$$\bar{r}'(a+D) = r_0(f'+g') \tag{17}$$

gegeben ist. Als zusätzliche Bedingung muß

$$(f'+g') < 0 \tag{18}$$

erfüllt sein, da sonst diese neue ungestörte Bahn die optische Achse nicht schneidet. Daraus ergibt sich eine Einschränkung für die Werte von K und D. Aus Gl. (6 b) erhält man

$$\frac{d}{dz}(\delta r_{II})_{z=a+D} = \frac{K r_0 D}{\sqrt{h}}\left\{\frac{4}{3(h-1)}\ln\frac{2\sqrt{h}}{(3-\sqrt{h})} + k\right\} =$$

$$= K r_0 D \cdot M(h,k) = g' \cdot r_0. \tag{19}$$

Damit und mittels Gl. (2 b) bekommt man aus der Beziehung (18)

$$K D^2 \leqslant \frac{3}{8h} \cdot \frac{(h-1)(\sqrt{h}-1)}{M(h,k)}. \tag{20}$$

Da die Störung δr_{II} an der Stelle $z = a + D$ noch klein sein muß gegenüber r, also etwa

$$\frac{\delta r(a+D)}{r(a+D)} \leqslant 10^{-2} \tag{21}$$

gelten muß, ergibt sich in Form der Ungleichung

$$K D^2 \leqslant 10^{-2} \cdot \frac{(3-\sqrt{h})}{2N(h,k)} \tag{22}$$

eine weitere einschränkende Bedingung. Die Gleichung

$$\bar{r}(z) = r_0(f'+g')(z-a-D) + r_0(f+g) \tag{23}$$

beschreibt die Teilchenbahn nach Gl. (13) und hat als Brennpunkt

$$z = a + D - \frac{f+g}{f'+g'}. \tag{24}$$

Es bringt also eine Beachtung der Raumladung nur bis zum Ende des Linsenfeldes an der Stelle $z = a + D$ in der Rechnung noch keine Verbreiterung des Brennpunktes zu einem Brennfleck, wohl aber eine Verschiebung desselben in der z-Richtung.

Unter Zugrundelegung der schon in der vorhergehenden Arbeit [1] entwickelten Gesichtspunkte bekommt man für die Bahnen (23) als Raumladungsbeitrag zur elektrischen Feldstärke in der r-Richtung

$$\delta E_r = \sqrt{\frac{m}{2eh|V_0|}} \cdot \frac{2\pi j_0 r_0}{[(f'+g')(z-a-D)+(f+g)]} \tag{25}$$

und mit

$$m \cdot v_{z,III}^{0\,2} \cdot \frac{d^2}{dz^2}(\delta r) = e\,\delta E_r \tag{26}$$

die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dz^2}(\delta r) = \frac{K \cdot r_0}{h^{3/2}} \cdot \frac{1}{[(f'+g')(z-a-D)+(f+g)]^2}. \tag{27}$$

Dabei ist

$$v^0_{z,III} = \sqrt{\frac{2\,e\,h\,|V_0|}{m}} \tag{28}$$

die Geschwindigkeitskomponente in der z-Richtung, die der ursprünglichen, durch Gl. (3) beschriebenen Bewegung zukommt und die durch die Raumladung in der vorliegenden Näherung nicht beeinflußt wurde. Da die Anfangsbedingungen

$$\frac{d}{dz}(\delta r)_{z=a+D} = 0; \qquad (\delta r)_{z=a+D} = 0 \tag{29}$$

lauten, ergibt sich als Lösung von Gl. (27) durch elementare Integration

$$\frac{d}{dz}(\delta r) = \frac{K r_0}{(f'+g')\,h^{3/2}} \cdot \ln\left[\frac{(f'+g')(z-a-D)}{(f+g)} + 1\right] \tag{30}$$

und

$$\begin{aligned}\delta r = \frac{K r_0}{(f'+g')^2 h^{3/2}} &\{[(f'+g')(z-a-D)+(f+g)]\cdot \\ \cdot \ln&[(f'+g')(z-a-D)+(f+g)] - (f+g)\cdot\ln(f+g)\} - \\ &- (z-a-D)\frac{K r_0}{(f'+g')\,h^{3/2}}[\ln(f+g)+1].\end{aligned} \tag{31}$$

Eine erste Näherung für den Brennpunkt liefert

$$\bar{r}'(z) + \frac{d}{dz}(\delta r) = 0$$

oder

$$r_0(f'+g') + \frac{K r_0}{(f'+g')\,h^{3/2}} \cdot \ln\left[\frac{(f'+g')(z-a-D)}{(f+g)} + 1\right] = 0. \tag{32}$$

Daraus bekommt man

$$z_{BF} = a + D - \frac{f+g}{f'+g'}\left[1 - e^{-\frac{(f'+g')^2 h^{3/2}}{K}}\right]. \tag{33}$$

Wie gut diese Näherung ist, entscheidet das Verhältnis

$$\left(\frac{\delta r}{\bar{r}}\right)_{z=z_{BF}}.$$

Beträgt es mehr als 1 bis 2%, so muß man den Punkt z_1 suchen, wo etwa

$$\left(\frac{\delta r}{\bar{r}}\right)_{z=z_1} = 10^{-2} \tag{34}$$

gilt. Von dort weg hat man wieder eine ungestörte Bahn nach Art der Gl. (23) anzusetzen, nur daß hier an Stelle der alten neue Werte f_1, g_1

und f_1', g_1' treten. An Stelle von $(z - a - D)$ tritt $(z - z_1)$. Auf diese Weise kann man den Brennfleck beliebig genau ermitteln. Sein Radius R_0 ergibt sich aus

$$R_0 = \bar{r}(z_{BF}) + \delta r(z_{BF}). \tag{35}$$

Es wäre natürlich auch möglich gewesen unter Zugrundelegung der bekannten Werte

$$\bar{r}(a + D) = r_0(f + g) \tag{16}$$

und

$$\bar{r}'(a + D) = r_0(f' + g') \tag{17}$$

von den WENDT-GLASERschen Ergebnissen für den feldfreien Raum auszugehen [4], [5]. Danach lautet die Gleichung der äußeren Bahn für den Bereich III

$$R'' - \frac{\pi j_0 r_0^2}{|h V_0|^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{2e}} \cdot \frac{1}{R} = 0. \tag{36}$$

Mit

$$\sigma = \frac{2\pi j_0 r_0^2}{|h V_0|^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{2e}} \tag{37}$$

vereinfacht sich Gl. (36) in übersichtlicher Weise zu

$$R'' - \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{1}{R} = 0. \tag{36 a}$$

Die Integration liefert

$$R' = \sqrt{\sigma \ln \frac{R}{R_0}}, \tag{38}$$

wobei R_0 der Brennfleckradius ist. Denn dort ist die Bedingung

$$R_{BF}' = 0 \tag{39}$$

erfüllt.

Aus den Anfangsbedingungen (16, 17) ergibt sich

$$R_0 = r_0(f + g) \cdot e^{-\frac{h^{3/2}(f' + g')^2}{K}}. \tag{40}$$

Weitere Integration liefert für die Lage des Brennflecks

$$z_{BF} = a + D + \frac{2 R_0}{\sqrt{\sigma}} \int_{-\sqrt{\ln \frac{R(a+D)}{R_0}}}^{0} e^{s^2}\, ds \tag{41}$$

mit

$$\ln \frac{R(a + D)}{R_0} = \frac{h^{3/2}(f' + g')^2}{K}.$$

Ein Vergleich zeigt folgendes Ergebnis: Zur Berechnung von R_0 eignet sich Gl. (40) besser als der erst durch Iteration zu gewinnende Ausdruck (35). Anders ist es bei der Formel (41) für die Lage des Brenn-

flecks. Sind die darin auftretenden Integrale auf Grund von Tabellen zugänglich[1], so liefert auch Gl. (41) schneller die gewünschten Ergebnisse. Ist man jedoch gezwungen, diese Integrale selbst auszuwerten, so ist dieses Unternehmen wegen der mit h stetig und stark wachsenden unteren Grenze ziemlich langwierig, will man es mit hinreichender Genauigkeit durchführen. Aus diesem Grund dürfte hier die Iteration vorzuziehen sein.

4. Auswertung der Ergebnisse für einen speziellen Fall

Nun soll für einen bestimmten Fall ($k = 3$) die Brennpunktverschiebung berechnet werden. Zu diesem Zweck müssen die Bedingungen (20) und (21) erst dafür ausgewertet werden. Dies ist in Form der Kurven in Abb. 4 und 5 geschehen.

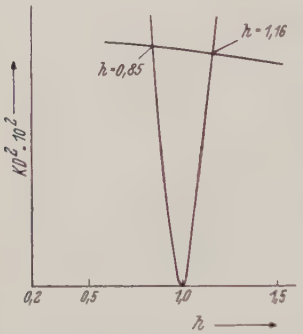

Abb. 4. Grenzkurven zu den Gln. (20, 22)

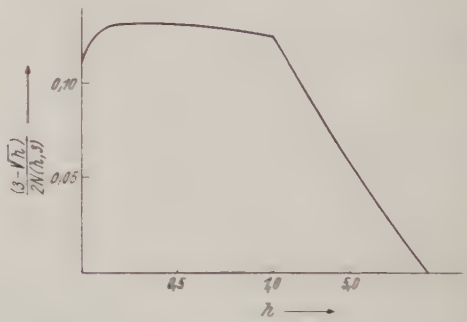

Abb. 5. Grenzkurve zu Gl. (22)

Tabelle 1

h	A	B	h	A	B
0,0	∞	0,1091	1,0	0,000	0,1250
0,1	0,142	0,1283	2,0	$0{,}291 \cdot 10^{-1}$	0,1084
0,2	$0{,}782 \cdot 10^{-1}$	0,1311	3,0	$0{,}864 \cdot 10^{-1}$	0,0913
0,3	$0{,}479 \cdot 10^{-1}$	0,1318	4,0	0,156	0,0746
0,4	$0{,}298 \cdot 10^{-1}$	0,1317	5,0	0,231	0,0585
0,5	$0{,}181 \cdot 10^{-1}$	0,1311	6,0	0,310	0,0431
0,6	$0{,}104 \cdot 10^{-1}$	0,1302	7,0	0,389	0,0281
0,7	$0{,}519 \cdot 10^{-2}$	0,1285	8,0	0,463	0,0139
0,8	$0{,}218 \cdot 10^{-2}$	0,1274	9,0	0,000	0,0000
0,9	$0{,}524 \cdot 10^{-3}$	0,1265			

$$A = \frac{3}{8h} \frac{(h-1)(\lfloor \overline{h} - 1)}{M(h,3)}; \qquad B = \frac{(3 - \lfloor \overline{h})}{2N(h,3)}$$

[1] $\int_0^x e^{t^3} dt$ ist in JAHNKE-EMDE nur für Werte $0 \leqq x \leqq 2$ tabelliert.

Die zugehörigen Zahlenwerte stehen in Tab. 1. Aus Abb. 4 sieht man, daß die Bedingung (20) nur einen ganz schmalen Streifen aus dem nach Bedingung (22) zugelassenen Bereich herausschneidet ($0{,}85 \leqslant h \leqslant 1{,}16$). Den ganzen Verlauf der Grenzkurve gibt Abb. 5 wieder.

Tabelle 2

h	$z_B - a - D$	h	$z_B - a - D$	h	$z_B - a - D$
0,0	0,000	1,0	∞	1,5	157,1
0,1	2,906	2,0	51,07	2,5	27,12
0,2	7,699	3,0	17,32		
0,3	15,52	4,0	8,881		
0,4	28,56	5,0	5,166		
0,5	51,99	6,0	3,044		
0,6	98,88	7,0	1,671		
0,7	206,0	8,0	0,715		
0,8	534,9	9,0	0,000		
0,9	2461,0	0,65	140,03		

z_B = Brennpunkt der ungestörten Bahn.

Aus Abb. 4 kann man entnehmen, daß für die Werte

$$K = 1{,}12 \cdot 10^{-5}; \qquad D = 5\,\text{cm}$$

der Bereich $0 \leqslant h \leqslant 0{,}85$ und $1{,}16 \leqslant h < 7$ gültig ist. Für diese Bereiche wurden unter Zugrundelegung des obigen K- und D-Wertes Brennpunkt und Brennpunktverschiebung ausgerechnet. Die Ergebnisse sind in Tab. 2 und 3 angeführt und in den Abb. 6 und 7 in Form von Kurven festgehalten.

Tabelle 3

h	Δz_1	Δz_2	h	Δz_1	Δz_2
0,1	0,006	0,065	2,0	0,560	1,069
0,2	0,038	0,153	3,0	0,111	0,140
0,3	0,123	0,367	4,0	0,058	0,061
0,4	0,302	1,087	5,0	0,035	0,035
0,5	1,034	2,121	6,0	0,025	0,026
0,6	2,520	26,52	7,0	0,019	0,020
0,7	11,75	148,03			
0,8	78,7				

Dabei ist Δz_1 die Verschiebung des Brennpunktes, wenn man nur das Gebiet bis zum Linsenfeldende als raumladungserfüllt betrachtet, Δz_2 die Verschiebung, wenn die Raumladung längs des ganzen Strahlenganges wirkt.

Man sieht, daß nennenswerte Abweichungen für $K = 1{,}12 \cdot 10^{-5}$ nur in der Nähe von $h = 1$ vorkommen. Die Stromdichten, bzw. Beschleunigungsspannungen V_0, die zu diesem K-Wert gehören, sind aus Abb. 8 ersichtlich.

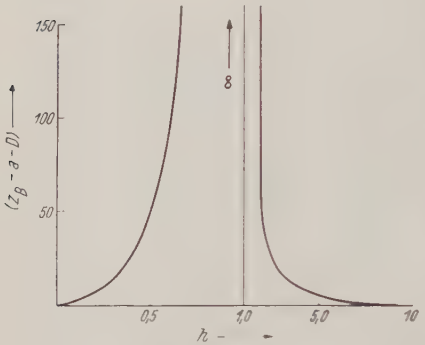

Abb. 6. Verlauf der Größe $(z_B - a - D)$ für die ungestörte Bahn

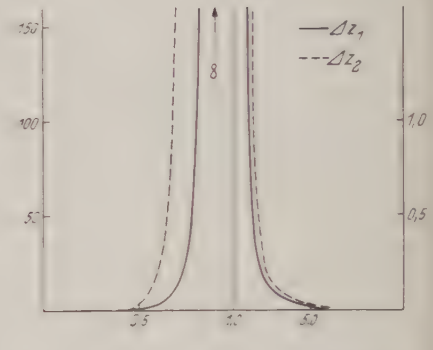

Abb. 7. Verschiebung des Brennpunktes durch die Raumladung

Um einen Überblick über die Ausdehnung des Brennfleckes zu erhalten, ist die Untersuchung des Verlaufes von

$$\frac{h^{3/2}(f' + g')^2}{K}$$

aus Gl. (40) notwendig, wobei f' und g' durch die Gln. (16), (17) definiert sind. Diese Untersuchung zeigt, daß für

$$h \leqslant 6$$

der Faktor

$$e^{-\frac{h^{3/2}(f'+g')^2}{K}} \leqslant 7{,}23 \cdot 10^{-3}$$

wird, wobei sich dieser Faktor für Werte $h < 6$ sehr schnell Null nähert[2]. Ebenso verhält es sich für Werte

$$h \geqslant 2.$$

Es tritt also unter den vorliegenden Annahmen über die Stromstärke j_0 und Spannung V_0 (s. Abb. 8) nur in einem ganz kleinen h-Bereich eine tatsächliche Brennfleckbildung auf. Dabei sieht man, daß sich der

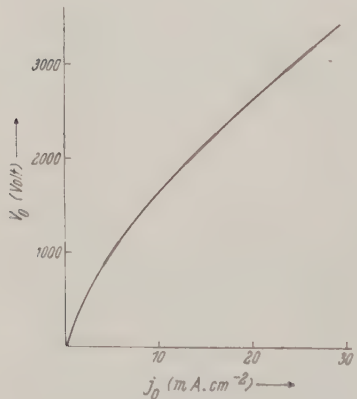

Abb. 8. Darstellung des Zusammenhanges $\frac{j_0 \pi}{|V_0|^{3/2}} \cdot \sqrt{\frac{m}{2e}} = 1{,}12 \cdot 10^{-5}$ (Formel 7).

[2] Siehe in K. HAYASHI, Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen e^x und e^{-x}.

Raumladungseinfluß bei der Verschiebung der Brennpunktslage in der z-Richtung um ein geringes stärker bemerkbar macht als bei der Bildung eines tatsächlichen Brenn*flecks*.

Meinen verehrten Lehrern Herrn Prof. Dr. P. Urban und Herrn Prof. Dr. E. Ledinegg danke ich für stete Förderung meiner Arbeit, sowie für zahlreiche Anregungen und Diskussionen.

Literatur

1. N. Pucker, Acta Phys. Austr. **12**, 475 (1959).
2. U. Timm, Z. Naturforschg. **10** a, 593 (1955).
3. M. M. Elkind, Rev. Scient. Inst. **24**, 129 (1953).
4. G. Wendt, Ann. Phys. **2**, 256 (1948).
5. W. Glaser, Handbuch d. Physik, **23**, 379 (1956).

Verschmierung und Entschmierung bei Röntgen-Kleinwinkeldiagrammen

Von

O. Kratky, G. Porod und **Z. Skala**

Aus dem Institut für physikalische Chemie der Universität Graz

Mit 28 Abbildungen

(*Eingegangen am 16. Juni 1959*)

Einleitung

Die Messung der Streuung von Röntgenstrahlen unter kleinen Winkeln hat sich als überaus wertvolles Verfahren zum Studium der kolloiden, insbesonders der makromolekularen Systeme erwiesen. Während die allgemeinen theoretischen Grundlagen sowie die experimentellen Hilfsmittel für die Durchführung der Messungen in verschiedenen neueren Zusammenfassungen [1, 2, 3, 4] ausführlich behandelt wurden, fehlt eine genügend eingehende Darstellung des *Zusammenhanges* zwischen dem experimentell gefundenen Diagramm und den theoretischen idealen Streukurven. Das Experiment muß nämlich aus Intensitätsgründen mit einem primären Strahlenbündel von endlichem Querschnitt durchgeführt werden, während sich die idealen Kurven auf einen unendlich fein ausgeblendeten Primärstrahl beziehen. Bei Kleinwinkelaufnahmen kommt es danach zu einer Überlagerung von idealen Streukurven, ein Vorgang, der schon bei seiner ersten quantitativen Behandlung [5] als „Verschmierung" bezeichnet wurde. Wenn wir bedenken, daß der Querschnitt des Primärstrahls beim Experiment normalerweise die Gestalt eines dünnen langen Striches hat, so verstehen wir, daß der Unterschied zwischen der experimentellen Messung und der Streukurve des unendlich fein ausgeblendeten Strahls (Querschnitt also punktförmig) sehr erheblich sein kann, so daß sich die beiden Kurven oft sogar im Typus unterscheiden.

Nach dem Gesagten ist klar, daß die Verschmierung — von ganz bestimmten Spezialfällen abgesehen — keinesfalls unberücksichtigt bleiben darf und ihre Eliminierung, die „Entschmierung", einen integrierenden Bestandteil jeder quantitativen Auswertung darstellt.

Es handelt sich bei dieser Erscheinung also um einen „Kollimationseinfluß". Nun erweckt insbesonders die Bezeichnung „Kollimationsfehler" (bzw. "collimation error" im Englischen) leicht den Eindruck

einer eher geringfügigen Modifikation der Streukurve, die man bei weniger großen Genauigkeitsanforderungen allenfalls vernachlässigen könnte. Hier dagegen tritt eine neue Kurve auf, die sich von der idealen Streukurve oft sehr beträchtlich unterscheidet, zu ihr aber in einer klar definierten Beziehung steht. Uns scheint es daher richtig, für diese spezielle Art von Kollimationseinfluß eine eigene Bezeichnung zu verwenden und wie vorgeschlagen von „Verschmierung", bzw. bei deren rechnerischen Eliminierung von „Entschmierung" zu sprechen. Neuerdings verwenden auch Beeman, Kaesberg, Anderegg und Webb [2] in ihrer in englischer Sprache geschriebenen Zusammenfassung den Ausdruck "slit-smeared" curves, eine offenbar dem deutschen Wort genau entsprechende Bezeichnung.

Wir haben im folgenden verschiedene originelle Beiträge zum Fragenkomplex darzulegen, insbesonders ein Verfahren zur Breitenentschmierung (Eliminierung des Einflusses der Dicke des strichförmigen Primärstrahlquerschnittes); dann die Benützung einer Kurvenschar, welche die durch die Länge des Primärstrahlquerschnittes erforderliche Entschmierung erleichtert, ferner die Konstruktion eines Gerätes, das unter Verwendung einer von Gerold stammenden Idee die Entschmierung auf mechanischem Wege durchzuführen gestattet, und schließlich eine Beschreibung der praktischen Maßnahmen zur Erzielung einer geeigneten Intensitätsverteilung im Primärstrahl. Da wir der Meinung sind, daß damit eine gewisse Abrundung des ganzen Problemkreises erreicht ist, schien es uns zweckmäßig, die Mitteilung dieser Fortschritte mit einer zusammenfassenden Darstellung des ganzen Gebietes zu verbinden. Ferner ergeben sich bei zahlreichen, in unserem Arbeitskreis tatsächlich durchgeführten Entschmierungen eine Reihe von praktischen Winken und Erfahrungen, deren aus dem Zusammenhang gerissene Mitteilung nicht zweckmäßig wäre, die sich aber in den Rahmen der vorliegenden Übersicht gut einfügen.

I. Allgemeine Fragen

1. Vernachlässigbarkeit der Divergenz des Primärstrahls und vereinfachte Bestimmung der Streuwinkel

Wir beschäftigen uns zunächst mit der Entschmierung für den Fall des Vorliegens isotroper Objekte, wie sie normalerweise die kolloiden Lösungen und Pulver darstellen. In einem eigenen Kapitel wird dann auf die Objekte mit Orientierung einzugehen sein.

Um eine Entschmierung durchführen zu können, muß grundsätzlich die Ausdehnung und Intensitätsverteilung im Primärstrahl bekannt sein. Es ist vielleicht nicht überflüssig, darauf hinzuweisen, daß es allein auf die Verteilung der Primärintensität in der Registrierebene — also am Film oder in der Ebene des Zählrohrspaltes — ankommt; die Strahlendivergenz braucht dagegen nicht besonders berücksichtigt zu werden, obwohl sie oft größer ist als die zu messenden kleinen Winkel der Streukurve.

Wir wollen diese Feststellung durch folgenden Hinweis belegen. Der Abstand zwischen dem Fokus der Röntgenröhre und der Registrierebene wird normalerweise nicht kürzer sein als 40 cm (vgl. Abb. 1, die etwa der in unserem Laboratorium verwendeten Anordnung entspricht [6]). Da die wirksame Länge des Fokus höchstens 1 cm beträgt, ergibt sich für die in der Mitte des Primärstrahls auffallende Strahlung eine halbe Divergenz (Abweichung von der Mittellinie) von $\alpha = 1{,}80$. Meist ist nur ein kürzerer Teil des Fokus wirksam (vgl. Abschnitt VI) und bei Verwendung eines gebogenen Kristallmonochromators nach JOHANSSON-GUINIER [7] wird die Divergenz noch zusätzlich stark herabgesetzt, so daß wir diesen Wert als den maximalen betrachten können.

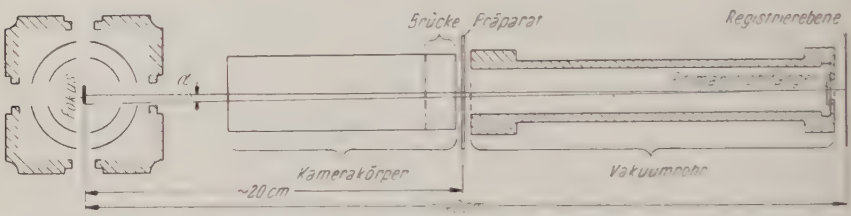

Abb. 1. Größenverhältnisse von Röntgenrohr und Kleinwinkelkamera
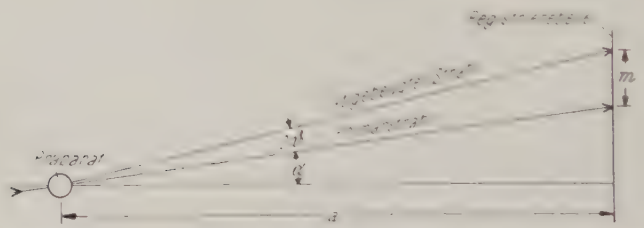
Abb. 2. Zusammensetzung von Divergenzwinkel α des Primärstrahls und Abbeugungswinkel $2\,\vartheta$ (stark überhöht). Zu Formel (1)

Es möge nun, wie Abb. 2 andeutet, von einem unter dem Winkel α schief auf die Registrierebene auffallenden Primärstrahl durch das Präparat ein unter dem Winkel $2\,\vartheta$ abgebeugter Strahl ausgelöst werden. Wir betrachten den ungünstigsten Fall, wo sich die beiden Winkel in der Gesamtablenkung addieren. Es ergibt sich dann die Aufgabe, aus dem Normalabstand a des Präparates von der Registrierebene und dem Abstand m zwischen den Schnittpunkten dieser mit dem Primärstrahl und dem abgebeugten Strahl den Winkel $2\,\vartheta$ auszurechnen. Wie man leicht überblickt, ist für α-Werte, die über 1/80 nicht hinausgehen, und $2\,\vartheta$-Werte, die selten 1/10 übersteigen, genügend genau

$$m/a \doteq \operatorname{tg} 2\,\vartheta \doteq \sin 2\,\vartheta \doteq 2\,\vartheta \qquad (1)$$

Für $\alpha = 1/80$ und $2\,\vartheta = 1/10$ wäre der Unterschied zwischen m/a und $2\,\vartheta$ nur 1/2%.

Effekte, die von der Divergenz der primären Strahlung herrühren, dürfen danach normalerweise unbedenklich vernachlässigt werden und es ist zulässig, bei allen Winkelmessungen einfach nach (1) vorzugehen.

2. *Die grundsätzlichen Möglichkeiten einer Anwendung der Fourieranalyse zur Entschmierung*

Jedes Flächenelement des Primärstrahlabbildes in der Registrierebene liefert einen Beitrag zu der Kleinwinkelstreuung, welcher der Primärintensität an der betreffenden Stelle proportional ist und für einen bestimmten Meßpunkt einem Streuwinkel $2\vartheta = m/a$ entspricht, wobei m den Abstand zwischen Flächenelement und Meßpunkt, sowie a den Abstand Präparat-Registrierebene bedeutet. Die Überlagerung aller dieser Beiträge gibt das verschmierte Kleinwinkeldiagramm.

Mathematisch kann dieser Zusammenhang als eine „Faltung" der primären Intensitätsverteilung mit dem unverschmierten Streudiagramm betrachtet werden, worauf zuerst SPENCER [8] im Zusammenhang mit dem analogen Problem in der Weitwinkelstreuung hingewiesen hat. Auf Grundlage der bekannten Sätze über die FOURIER-Transformation der Faltungsfunktionen wurde von KRANJC [9] ein völlig allgemeines und mathematisch exaktes Entschmierungsverfahren vorgeschlagen. Es erfordert eine zweidimensionale FOURIER-Analyse sowohl des Primärstrahls als auch des verschmierten Kleinwinkeldiagramms und außerdem eine FOURIER-Synthese des entschmierten Diagramms aus den Quotienten der beiden durch FOURIER-Analyse gewonnenen Funktionen. Dieses Verfahren ist recht mühsam und es scheint deshalb auch noch nicht angewendet worden zu sein. Außerdem muß man dabei — trotz der prinzipiellen Exaktheit — eben wegen der komplizierten Operationen wohl mit einer größeren Ungenauigkeit rechnen als bei den später zu besprechenden Methoden.

3. *Herstellung optimaler Bedingungen zur Vernachlässigbarkeit des Verschmierungseffektes*

Ein ganz anderer Weg besteht darin, die Verschmierung so klein zu halten, daß sie in erster Näherung überhaupt vernachlässigt werden kann. Nachdem eine beliebig feine Ausblendung des Primärstrahls aus Intensitätsgründen nicht in Frage kommt, bleibt nur, optimale Bedingungen anzustreben, unter denen bei möglichst großer Intensität ein möglichst kleiner Verschmierungsfehler entsteht. YUDOWITCH [10] hat die gebräuchlichen Typen der Kleinwinkelkameras unter diesem Gesichtspunkt diskutiert. Er geht bei seinen Überlegungen davon aus, daß der Verschmierungsfehler überschlagsmäßig durch die Differenz zweier Strecken charakterisiert ist: den Abständen eines Meßpunktes von den ihm am fernsten und am nächsten gelegenen Punkten des Primärreflexes. Die quantitative Durchführung dieser Idee führt aber im einzelnen auf komplizierte Ausdrücke, deren Behandlung wir uns versagen möchten.

Wenn man schon auf eine exakte Entschmierung verzichtet, dann scheint uns eine dem Näherungscharakter eines solchen Vorgehens mehr

angepaßte einfachere Betrachtung als sie Yudowitch anstellt, zu genügen. Sie geht vom gleichen Grundgedanken aus, nämlich vom Bestreben, bei einem rechteckigen Querschnitt des Primärstrahls das Kantenverhältnis so zu bemessen, daß Länge und Breite hinsichtlich der Verschmierung gleichwertig sind. Eine streng rationale Festlegung in diesem Sinne ist aber nicht möglich, weil sich die Verschmierungen durch Dicke und Länge in qualitativ verschiedener Weise auswirken, denn:

1. Die Länge bewirkt eine Verschmierung mit sehr asymmetrischer Abstandsverteilung, während die Dickenverschmierung symmetrisch ist.

2. Die Dickenverschmierung läßt den Schwerpunkt, der als Nullpunkt der Abszisse der Streukurve genommen werden muß, ungeändert, während er durch die Längenverschmierung verschoben wird.

3. Die durch die Primärstrahllänge verursachte Abstandsvariation hängt vom Abstand des Meßpunktes von der Primärstrahlmitte ab, was bei der Primärstrahldicke nicht der Fall ist.

Insbesonders wegen des letzten Punktes kann jede Festsetzung über ein optimales Verhältnis der beiden Dimensionen immer nur für einen bestimmten m-Wert erfolgen. Aus dieser Bemerkung geht wohl schon hervor, daß ein solches Verfahren für den Bereich des Hauptmaximums der Kleinwinkelstreuung selten anwendbar sein wird, weil die interessierenden m-Werte dort einen großen relativen Bereich (vielleicht eine Größenordnung) durchlaufen. In diesem Streubereich wird man daher in der Regel die im folgenden behandelten Verfahren der regulären Entschmierung bei Benützung eines sehr langen Primärstrahls anwenden.

Häufig interessiert es aber, einen weiter außen liegenden, ziemlich scharf abgegrenzten Bereich näher zu untersuchen, etwa um ein dort liegendes Nebenmaximum genauer zu studieren, so daß dann die Bedingung eines wenig variierenden m-Wertes erfüllt wäre. In diesem meist sehr intensitätsarmen Teil der Streukurve wird man zur Erzielung eines Intensitätsgewinnes den Primärstrahl so dick machen, wie das im Hinblick auf die Breitenverschmierung gerade noch tragbar erscheint. Bei der Untersuchung eines Nebenmaximums darf z. B. die Primärstrahldicke unbedenklich gleich der halben Breite des Nebenmaximums genommen werden. Für die Bemessung einer dazu äquivalenten Längenverschmierung hat sich nun in unserer Praxis das folgende überschlagsmäßige Verfahren als ausreichend und zweckmäßig erwiesen: wir sehen die Längen- und Breitenverschmierung dann als äquivalent an, wenn die Differenz der Abstände des Meßpunktes P vom Randpunkt R und vom Mittelpunkt M der Mittellinie des Primärstrahls gleich der halben integralen Breite $b/2$ desselben ist. Abb. 3 macht dies unmittelbar anschaulich. Bezeichnen wir die halbe Primärstrahllänge mit l, so erhalten wir in elementarer Rechnung, die wir der Natur der Fragestellung entsprechend in erster Näherung durchführen:

$$\frac{b}{2} = \sqrt{m^2 + l^2} - m \doteq \frac{l^2}{2\,m} \qquad \text{oder} \qquad l^2 = m\,b \tag{2}$$

Bei einem dreieckigen Profil des Primärstrahls, das wir in einer für diese überschlagsmäßige Betrachtung ausreichenden Näherung annehmen können, ist die integrale Breite gerade die Hälfte der totalen Breite $2\,b$. Damit hat b in der Beziehung (2) auch die Bedeutung der halben totalen Breite und wir kommen damit zu einer einfachen Regel für eine optimale Bemessung der Dimensionen des Primärstrahls: *die halbe Länge l ist gleich dem geometrischen Mittel aus der halben totalen Breite b und dem Abstand m des Meßpunktes von der Primärstrahlmitte.*

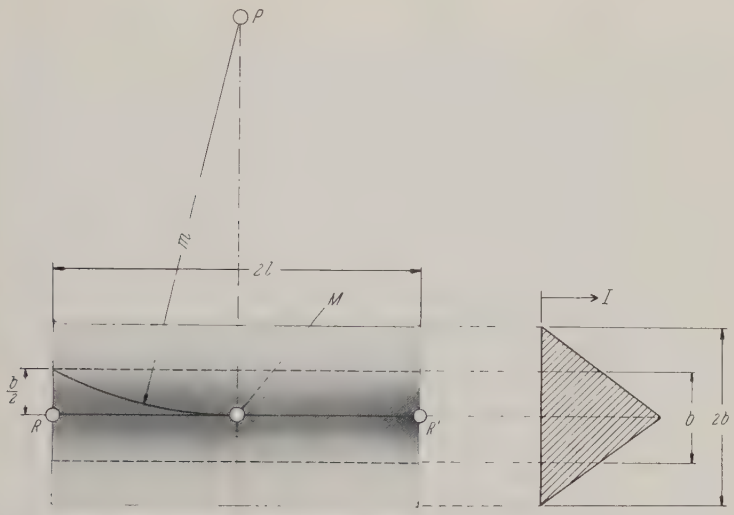

Abb. 3. Schematische Darstellung des Primärstrahls mit Dreiecksquerschnitt. Konstruktion zur optimalen Bemessung der Dimensionen des Primärstrahls nach Formel (2)

Nach dieser Festsetzung können wir nun auch leicht eine Aussage über die Schwerpunktsverschiebung machen, die ja bei jeder derartigen Aufnahme berücksichtigt werden muß. Wenn wir die Streuung in der Umgebung eines Punktes P betrachten, so müssen wir natürlich fragen, welche mittlere Ablenkung beim Zustandekommen dieser Streuung wirksam ist, oder welches der mittlere Abstand ist, den P von den Flächenelementen des Primärstrahls hat. Zunächst sieht man ein, daß es genügt, den Primärfleck durch seine Mittellinie RR' zu ersetzen, weil die Mittelwerte von symmetrisch dazu gelegenen Geraden in guter Näherung die Gerade RR' ergeben. Der Mittelwert der Entfernung, den P von allen Punkten der Geraden RR' hat, ist aber dann:

$$m_s = \frac{1}{l} \int_0^l \sqrt{m^2 + t^2}\, dt \qquad (3\,a)$$

was wir in derselben Näherung wie vorhin behandeln können:

$$m_s = \frac{1}{l}\int_0^l \left(m + \frac{t^2}{2\,m} \ldots\right) dt = m + \frac{l^2}{6\,m} \ldots . \qquad (3\,\text{b})$$

Falls wir die optimale Dimensionierung des Primärstrahlquerschnitts gemäß der Beziehung $l^2 = m\,b$ durchgeführt haben, gilt

$$m_s = m + \frac{b}{6} \qquad (3\,\text{b})$$

Die vom Primärstrahlmittelpunkt M gemessenen Ablenkungen m sind also um 1/6 *der integralen Primärstrahlbreite zu vergrößern.*

Wird die Messung der gestreuten Intensität nicht auf photographischem Wege, sondern mit einer Impulszähleinrichtung vorgenommen, so ist zu beachten, daß sich die endliche Breite des Zählrohrspaltes wie eine Verbreiterung des Primärstrahls auswirkt. Man kann diesem Umstand dadurch in ausreichender Weise Rechnung tragen, daß man die integrale Breite des Primärstrahls mit der integralen Breite des Zählrohrspaltes pythagoräisch addiert und diesen vergrößerten Wert der obigen Rechnung zugrundelegt. Ist die Breite des Zählrohrspaltes nur ein Bruchteil der Breite des Primärspaltes, so kann diese Korrektur in Anbetracht des Umstandes, daß es sich hier doch nur um eine Abschätzung handelt, unterbleiben.

II. Einfluß der Primärstrahllänge

1. Exakte Formulierung der Längenverschmierung. Normierungsfragen

Da das eben beschriebene Verfahren nur in besonderen Fällen anwendbar ist, wird man meist um eine strenge Berücksichtigung der Verschmierung nicht herumkommen. Weitaus am häufigsten wird die experimentelle Anordnung mit spaltförmig ausgeblendetem Strahl verwendet. Als erster hat wohl Hosemann [1] explizite darauf hingewiesen, daß die Verwendung einer solchen Primärstrahlform bei Röntgenkleinwinkelaufnahmen aus Intensitätsgründen sehr zweckmäßig ist. Der Querschnitt des Primärstrahls hat also eine sehr große Länge und nur eine geringe Breite. Die Verschmierung setzt sich dann aus zwei unabhängigen Operationen, der Längen- und der Breitenverschmierung, zusammen, die getrennt behandelt werden können. Bei nicht zu breitem Primärstrahl kann die letztere meist in erster Näherung vernachlässigt werden, so daß nur die Längenverschmierung zu berücksichtigen bleibt, der wir uns zunächst zuwenden.

Bei der experimentellen Anordnung mit Spaltblende wird häufig keine vollkommen gleichförmige Ausleuchtung in der Längsrichtung des Primärstrahls zu erreichen sein, es liegt allgemein eine Intensitätsverteilung $P(t)$ vor, wenn wir mit t den Abstand eines Punktes vom Mittelpunkt des strichförmigen Primärstrahls bezeichnen. Der Zu-

sammenhang zwischen der unverschmierten Streukurve $I(m)$ und der längsverschmierten $\tilde{I}(m)$ lautet dann:

$$\tilde{I}(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, I(\sqrt{m^2 + t^2})\, dt \qquad (4)$$

Die primäre Intensitätsverteilung $P(t)$, die durch die Geometrie der experimentellen Anordnung bedingt ist, hat normalerweise etwa die Form eines Trapezes, das heißt sie ist im Mittelstück ziemlich konstant und geht dann gegen den Rand zu ungefähr linear auf Null herunter.

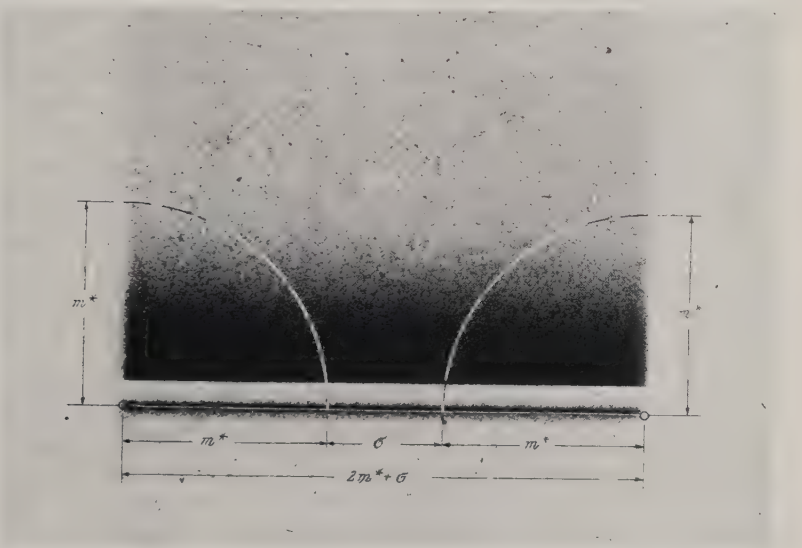

Abb. 4. Primärstrahl und Kleinwinkelstreuung. Dimensionierung des „unendlich langen" Primärstrahls

Bei großer Länge tragen die Randgebiete nur mehr wenig zur verschmierten Kurve bei, die in der Mittelnormale des Primärstrahls gemessen wird. Eine wesentliche Vereinfachung ergibt sich daher, wenn das konstante Mittelstück so lang ist, daß das Randgebiet praktisch überhaupt keine Rolle spielt. Wir sprechen in diesem Fall von einem „unendlich langen" Primärstrahl. Er liegt vor, wenn der konstante Teil mehr als doppelt so lang ist, wie die Ausdehnung der merklichen Schwärzung des Kleinwinkeldiagrammes. Man muß nämlich bedenken, daß man für die Messung im allgemeinen eine Zone braucht, die in der Längsrichtung des Primärstrahls eine Ausdehnung von einigen Millimetern besitzt. Bei der Impulszählung ist aus Intensitätsgründen ein Zählrohrspalt von jedenfalls einigen Millimetern Länge erforderlich und bei der photographischen Methode bewährt es sich, zur Verringerung des durch die Körnigkeit des Films bedingten Fehlers mehrere Photometerkurven,

die durch Vermessung an verschiedenen Stellen gewonnen wurden, übereinander zu zeichnen [12], wozu man ebenfalls einen Bereich braucht, der in der Richtung des Primärstrahls eine Dimension von zwei bis vier Millimetern besitzt. Hat die für die Messung erforderliche Zone die Länge σ und bezeichnen wir den Bereich der merklichen Streuung, also den maximal auftretenden m-Wert mit m^*, so soll mithin der Primärstrahl einen gleichmäßigen Bereich von mindestens der Länge $(2\,m^* + \sigma)$ aufweisen (Abb. 4). Ist diese Bedingung erfüllt, so kann in Formel (4) $P(t) = 1$ gesetzt, also fortgelassen werden.

Der durch die Formel ausgedrückte Zusammenhang läßt sich auch folgendermaßen anschaulich beschreiben. Wir stellen uns das unverschmierte Streudiagramm als rotationssymmetrischen Intensitätsberg mit der Höhe $I(m)$ im Abstand m vom Mittelpunkt vor. Legen wir nun durch diesen Berg im Radialabstand m einen Schnitt normal zum Radius, so entspricht die Fläche unter der „Schnittkurve" gerade der Intensität $\tilde{I}(m)$ der verschmierten Streukurve, allerdings vorausgesetzt, daß $P(t)$ konstant ist.

Wir müssen hier eine Bemerkung zur Normierung der Intensitäten I und $\tilde{I}$ machen. Bei der Behandlung des Zusammenhanges zwischen $\tilde{I}(m)$ und $I(m)$ interessiert nicht nur die Veränderung der Kurvenform, wir fragen auch nach der Intensität, die man sich in dem der unverschmierten Streukurve entsprechenden unendlich fein ausgeblendeten Primärstrahl konzentriert denken muß. Für verschiedene Auswertungen ist nämlich die Kenntnis der sogenannten Absolutintensität, das ist das Verhältnis der Streuintensität zur Primärintensität bei der unverschmierten Kurve erforderlich. Man kann dann z. B. an einer verdünnten kolloiden Lösung das mittlere Molekulargewicht (bzw. im Sonderfall der homodispersen makromolekularen Lösung das wahre Molekulargewicht) bestimmen, und zwar durch den Vergleich der auf den Winkel Null extrapolierten Intensität der unverschmierten Kurve mit der Primärintensität [13]; also müssen wir der unverschmierten Kurve auch die ihr entsprechende Primärintensität zuordnen können. Wenn wir bei der Umrechnung von Beziehung (4) ausgehen, so beinhaltet die darin gegebene Verknüpfung von I und $\tilde{I}$ folgende Festsetzungen:

$P(t)$ ist die auf die Längeneinheit des strichförmigen Primärstrahls bezogene Energie, die in einem willkürlich festgesetzten Maß (das dann auch für die Streukurve gilt) zu messen ist; dem unendlich fein ausgeblendeten Primärstrahl der unverschmierten Kurve ist dann eine Energie zuzuordnen, wie sie in einem strichförmigen Primärstrahl der Länge 1 und der Intensität 1 enthalten ist. Das ist gleichbedeutend mit der Festsetzung, daß die integrale Intensität des zugeordneten Primärstrahls durch die Fläche unter dem Querschnitt des Primärstrahles gemessen wird. Eine Vereinfachung ergibt sich, wenn der Primärstrahl bei der verschmierten Kurve gleichmäßig belegt ist, denn dann kann die Intensität des strichförmigen Primärstrahls als Einheit gewählt werden und $P(t)$ fällt aus der Gleichung überhaupt weg. Bei endlichem Primärstrahl mit einem gleichmäßig belegten Teil kann man dessen Intensität eben-

falls als Einheit wählen. Bei ungleichmäßig belegtem Primärstrahl ist normalerweise ohnehin eine Entschmierung nicht möglich (vgl. die folgenden Kapitel), mit der einzigen Ausnahme, daß $\tilde{I}(m)$ eine Gausssche Kurve ist oder in Gausssche Kurven zerlegt wurde. Dann gilt das oben Gesagte über die willkürliche Wahl der Einheit für die Intensität.

Häufig liegt die experimentelle Streukurve in vergrößerter Form vor, entweder durch die Photometrierung oder die vergrößerte Auftragung bei der Impulszählung. Ist die Vergrößerung p, so können alle Operationen an der vergrößerten Kurve vorgenommen werden, nur muß man als Abstand Präparat-Registrierebene den fiktiven Abstand $a \cdot p$ (an Stelle des wahren Abstandes a) einführen. — Die Längeneinheiten sind in allen Fällen frei wählbar, nur müssen natürlich bei beiden Kurven die gleichen Einheiten verwendet werden.

2. *Möglichkeiten und Grenzen einer direkten Verwendbarkeit der spaltverschmierten Streukurven*

Die Berücksichtigung der Verschmierung kann grundsätzlich auf zweierlei Weise erfolgen. Entweder man geht die im folgenden dargelegten Wege einer exakten Entschmierung oder aber man unterstellt die in definierter Weise experimentell erhaltene verschmierte Kurve — praktisch kommt nur die Kurve in Betracht, die mit „unendlich" langem Spalt von vernachlässigbarer Breite aufgenommen wurde — direkt gewissen Auswertungen. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten.

1. Der eine von uns hat gezeigt [14], daß man auch aus der verschmierten Kurve die von ihm in die Theorie der Kleinwinkelstreuung eingeführte „Invariante" herleiten kann. Wir verstehen darunter den Ausdruck

$$Q = \int_0^\infty I(m)\, m^2\, dm,$$

der für Systeme derselben Zusammensetzung unabhängig von der kolloiden Struktur immer den gleichen Wert haben sollte. Mit der spaltverschmierten Kurve können wir an seiner Stelle das Integral

$$\tilde{Q} = \int_0^\infty \tilde{I}(m)\, m\, dt$$

einführen. Es gilt:

$$\tilde{Q} = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty I\left(\sqrt{m^2 + t^2}\right) \cdot m\, dt\, dm;$$

$$m^2 + t^2 = r^2; \qquad m = r\cos\varphi; \qquad t = r\sin\varphi$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty I(r)\, r^2 \cos\varphi \cdot dr\, d\varphi = 2 \int_0^\infty I(r)\, r^2\, dr = 2Q \tag{5}$$

Mittels dieser Größe kann man z. B. kontrollieren, welcher Bruchteil der vorhandenen Substanzmenge im untersuchten Kleinwinkelgebiet wirksam ist, das heißt den beobachteten Streueffekt verursacht. Zur Erläuterung sei folgendes bemerkt. Wenn man eine Größen- und Gestaltsbestimmung, sei es jetzt an einer Lösung, einem Pulver oder einem micellaren System durchgeführt hat, so ist von vornherein gar nicht gesagt, daß die ganze eingesetzte Substanzmenge wirksam war. Es könnte z. B. bei einer Lösung eines korpuskularen Eiweißstoffes ein Teil der Substanzmenge etwa durch einen Denaturierungsvorgang Klumpen (Clusters) gebildet haben, die zufolge ihrer Größe zu extrem kleinen Winkeln streuen, die experimentell nicht mehr erfaßt wurden; oder es könnte umgekehrt ein Teil der Substanz in sehr kleine Partikel zerteilt sein, deren Streuung sich weit über das Kleinwinkelgebiet hinaus zu größeren Winkeln erstreckt, so daß dieser Effekt im allgemeinen Untergrund untergeht. Analoge Fragen ergeben sich erst recht bei den viel unregelmäßigeren pulverigen oder micellaren Systemen. Hat man aber mittels der Invariante festgestellt, daß der gefundene Streueffekt ein Ausdruck der gesamten Substanzmenge ist, so bezieht sich dann die Aussage über die gefundene Dimension oder Gestalt ebenfalls auf die gesamte Substanzmenge. Derartige Betrachtungen wurden in unserem Arbeitskreis wiederholt durchgeführt [15].

Eine weitere generelle Eigenschaft aller Streukurven ist ihr asymptotischer Auslauf $\sim 1/m^4$, der durch die Spaltverschmierung in eine Kurve $\sim 1/m^3$ übergeht. Die Intensität dieses Auslaufes ist, wie an anderem Orte gezeigt wurde [14], proportional der inneren Oberfläche und der Invariante $\tilde{Q}$ dieser verschmierten Kurve, so daß man bei deren Kenntnis die innere Oberfläche ausrechnen kann [16, 17].

2. Man verschmiert sämtliche theoretischen Kurven für die Partikelstreuung entweder analytisch oder schlimmstenfalls graphisch nach (4) und nimmt die Auswertung der Experimente direkt mit diesen Kurven vor. So hat Schmidt [18] die theoretischen Kurven von Rotationsellipsoiden längsverschmiert. Es bestehen aber Bedenken gegen eine solche Art der Auswertung. Zunächst kann auf diese Weise praktisch nur der Spezialfall des unendlich langen Primärstrahls berücksichtigt werden, weil man sonst eine Unzahl von theoretischen Kurven vorrätig haben müßte. Das ist aber ein mehr praktischer Gesichtspunkt. Schwerer wiegt, daß bei der Verschmierung gewisse Gesetzmäßigkeiten der Streukurve und damit die Möglichkeit zur direkten Bestimmung wichtiger Parameter verloren gehen. So benötigt man z. B. unbedingt die unverschmierte Kurve, um aus der Neigungstangente der Guinier-Auftragung den Streumassenradius und um aus der Absolutintensität beim Winkel Null das Teilchenvolumen, bzw. das Molekulargewicht zu gewinnen. Das gleiche gilt für die Bestimmung des Querschnittsfaktors bei langen Stäbchen und des Dickenfaktors bei großen Blättchen, die aus der *un*verschmierten Kurve durch Multiplikation mit dem Streuwinkel, bzw. dem Quadrat desselben gewonnen werden können, beides Verfahren, die in der Praxis der Auswertung eine große Rolle spielen [19].

3. Es ist richtig, daß es gewisse Möglichkeiten gibt, auch aus der verschmierten Kurve wichtige Größen direkt zu entnehmen. So hat V. Luzzati ein Verfahren vorgeschlagen, um aus der verschmierten Streukurve $\tilde{I}(m)$ direkt den Streumassenradius R und die Intensität I_0 beim Winkel 0 zu bestimmen. Aus der letzteren kann dann in bekannter Weise das Volumen, bzw. das Molekulargewicht der Teilchen berechnet werden.

Luzzati geht von der Überlegung aus, daß eine Partikelstreukurve meist recht gut durch die Guiniersche Näherung beschrieben wird. Die Gausssche Glockenkurve ändert aber bei der Ver- und Entschmierung nicht ihre Form. Es ist daher günstig, die Streukurve in die Glockenkurve und eine Restkurve zu spalten, wobei dann das Entschmierungsverfahren nur für letztere graphisch durchzuführen wäre. Aber auch dieses kann wesentlich vereinfacht werden, wenn man sich darauf beschränkt, die Parameter I_0 und R festzustellen. Im Endresultat ergibt sich folgendes Verfahren:

Man trägt die verschmierte Streukurve $\tilde{I}(m)$ nach Guinier auf und bestimmt in bekannter Weise den scheinbaren Streumassenradius $\tilde{R}$ und durch Extrapolation auf den Winkel 0 den Anfangswert $\tilde{I}_0$. Hierauf wird die der Guinier-Geraden entsprechende Gausssche Kurve von $\tilde{I}(m)$ subtrahiert. Mit der so erhaltenen Restkurve $Z(m)$ werden die folgenden zwei Hilfsintegrale gebildet:

$$A = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{Z(m)}{m^2}\, dm; \qquad B = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{Z(m)}{m^4}\, dm$$

Die beiden Parameter I_0 und R ergeben sich dann als:

$$I_0 = \tilde{I}_0 \cdot 2 \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{\tilde{R}}{\lambda a p} - A$$

$$R^2 = \frac{\tilde{R}^2 + \frac{9}{16\pi^2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{(\lambda a p)^3}{\tilde{I}_0 \tilde{R}} B}{1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{\lambda a p}{\tilde{I}_0 \tilde{R}} A}$$

Wenn auch die vorgeschlagene Operation wesentlich einfacher ist als die reguläre Entschmierung, so kann doch nicht übersehen werden, daß die Bestimmung von B mit einer relativ großen Unsicherheit behaftet ist. Es läßt sich im ganzen schwer absehen, ob die Ergebnisse im Gesamteffekt genügend genau sind.

3. Verschmierung von einfachen Modellkurven und Grundsätzliches über ihre Verwendung zur Entschmierung von Teilkurven

Wir diskutieren zunächst die Verschmierung einiger einfacher Modellkurven. Die wichtigste Stelle nimmt hier ohne Zweifel die Gausssche Kurve ein, einmal weil sie nach Guinier [21] in vielen Fällen eine gute Approximation für eine Partikelstreukurve darstellt, und zum

andern, weil sie sich bei der Verschmierung besonders einfach verhält. Sie geht nämlich dabei wieder in eine Gausssche Kurve gleicher Breite, aber verschiedener Höhe über. Es ist dies auch der einzige Fall, wo es keine Rolle spielt, ob ein unendlich langer gleichmäßig belegter Primärstrahl oder eine beliebige Intensitätsverteilung $P(t)$ vorliegt[1].

$$I(m) = \text{const} \cdot e^{-k^2 m^2}; \qquad \tilde{I}(m) = K \cdot I(m); \qquad K = 2 \int_0^\infty P(t) \cdot e^{-k^2 t^2}\, dt \tag{6 a}$$

Bei unendlich langem gleichmäßig belegtem Primärstrahl gilt speziell: $P(t) = 1$; $K = \sqrt{\pi}/k$.

Die Entschmierung besteht dann einfach darin, daß man $\tilde{I}(m)$ durch die Konstante K dividiert, also z. B. im Falle eines unendlich langen gleichmäßig belegten Primärstrahls mit $k \sqrt{\pi}$ multipliziert. Den Parameter k bekommt man am bequemsten aus der Guinierschen Auftragung ($\log \tilde{I}$ gegen m^2), denn k^2 ist nichts anderes als das 2,303fache der Neigungstangente $\operatorname{tg} \alpha$ der so erhaltenen Geraden. Es gilt danach für eine Gausssche Streukurve:

$$I(m) = \tilde{I}(m) \sqrt{\frac{2{,}303 \operatorname{tg} \alpha}{\pi}} \tag{6 b}$$

Auf diesem Prinzip beruht eine von Shull und Roess [23] vorgeschlagene Methode der Entschmierung. Man zerlegt die experimentelle Kurve $\tilde{I}(m)$ in Gausssche Kurven, versieht jede mit dem zugehörigen Faktor und setzt dann wieder zusammen. Obwohl dieses Verfahren mathematisch völlig einwandfrei ist — sowohl die Verschmierungs- als auch die Entschmierungsoperation ist distributiv, kann also in beliebigen Teilen vorgenommen werden — hat es in der Praxis keinen allgemeinen Eingang gefunden, weil es keine Methode gibt, um eine vorgegebene Kurve eindeutig in Gausssche Kurven zu zerlegen. Man ist also auf Probieren angewiesen, was nicht sicher zum Ziele führt. Immerhin hat die Arbeitsgruppe um Beeman [24] dieses Verfahren wiederholt erfolgreich verwendet.

Es sei nun auf eine Möglichkeit [13] hingewiesen, von der sicher viel zu wenig Gebrauch gemacht wird. Sie besteht darin, daß man die Streukurve in eine oder mehrere auf analytischem Wege entschmierbare Teilkurven und eine Restkurve zerlegt. Die ersteren werden rechnerisch, die letztere nach dem später zu besprechenden allgemeinen Verfahren entschmiert. Man gewinnt dadurch zwar nichts an Arbeit, wohl aber

[1] Diese Bemerkung ist insofern von praktischer Bedeutung, als das Ergebnis der unter der Annahme gleichmäßiger Belegung durchgeführten Entschmierung bei einer der Gaussschen Gestalt nahekommenden Kurve auch dann zu einwandfreien Resultaten führt, wenn nennenswerte Abweichungen von der Gleichmäßigkeit der Belegung des Primärstrahls bestehen. Ist die Gausssche Form der Streukurve aber nicht annähernd gegeben, so dürfen Abweichungen von der Gleichmäßigkeit nicht vernachlässigt werden.

an Genauigkeit; denn die Fehler, die man bei der Entschmierung der Restkurve macht, fallen bei der Gesamtkurve relativ weniger ins Gewicht. Sehr häufig wird es zweckmäßig sein, eine Gausssche Kurve abzuspalten, weil viele Streukurven dieser Gestalt sehr nahekommen.

Bei anderem Typus kann es sich oft bewähren, eine nach einer negativen Potenz des Streuwinkels verlaufende Kurve abzuspalten. Theoretisch entspricht bei den nicht verschmierten Kurven die erste Potenz einem sehr langen und sehr dünnen Stäbchen, die zweite Potenz einem sehr großen und sehr dünnen Blättchen [24] und die vierte Potenz dem asymptotischen Auslauf jeder Korpuskelstreukurve [14], womit Hinweise über die wichtigsten für die Abspaltung in Betracht kommenden Kurven gegeben sind. Bei der Verschmierung mit unendlich langem Primärstrahl werden diese Kurven flacher, und zwar erniedrigt sich die Potenz jeweils um eins. Nur bei der ersten Potenz kann man diese Regel nicht streng anwenden; dort darf der Primärstrahl grundsätzlich nie als unendlich lang betrachtet werden, denn wegen des schwachen Abfalls dieser Streukurve liefert der Rand des Primärstrahls auch bei beliebiger Länge desselben immer noch einen merklichen Beitrag. Für die anderen Potenzen haben wir:

$$\begin{array}{lll} I = \dfrac{1}{m^2} & I = \dfrac{1}{m^3} & I = \dfrac{1}{m^4} \\ \tilde{I} = \dfrac{\pi}{m} & \tilde{I} = \dfrac{2}{m^2} & \tilde{I} = \dfrac{\pi}{2\,m^3} \end{array} \quad ; \quad ; \quad ; \qquad (7)$$

Ganz analog würden sich höhere Potenzen verhalten, mit denen allerdings praktisch nicht zu rechnen ist. Bei der Entschmierung der abgespaltenen Potenzkurve hat man also so vorzugehen, daß man den Exponenten um 1 erhöht und die Kurve durch den zugehörigen Zahlenfaktor dividiert. Die entschmierten Teilkurven müssen nachher in der richtigen Intensität zusammengesetzt werden. Um dabei jeden Irrtum auszuschließen, sind die im folgenden dargelegten Entschmierungsverfahren bereits einheitlich im Sinne der oben gegebenen Normierung formuliert, das heißt die erhaltenen entschmierten Kurven entsprechen durchwegs einer Intensität, wie sie ein unendlich fein ausgeblendeter Primärstrahl erzeugen würde, durch dessen Querschnitt dieselbe Strahlungsenergie hindurchgeht wie durch ein Stück des homogenen, strichförmigen Primärstrahls von 1 cm Länge in der Registrierebene. Falls dieser nicht homogen ist, muß dem Stück von 1 cm eine konstante Intensität in dem Betrage zugeschrieben werden, der in der Verteilungsfunktion $P(t)$ willkürlich mit 1 festgesetzt wurde.

4. Das Entschmierungsverfahren für unendlich langen Primärstrahl nach Guinier und Fournet

Aus den oben angeführten Gründen besteht doch ein starkes Bedürfnis nach einer bequem zu handhabenden und ausreichend genauen Entschmierungsmethode. Eine solche wurde zuerst von Guinier und Fournet [26] für den Spezialfall des unendlich langen Primär-

strahls angegeben. Das Verfahren ist im Prinzip sehr einfach. Man differenziert die experimentelle Kurve $\tilde{I}(m)$, dividiert dann durch $(-m)$ und verschmiert schließlich die so erhaltene Hilfskurve $F(m) = -\tilde{I}'/m$, wobei man das Integral von 0 bis ∞ führt. Als Resultat erhält man das π-fache der unverschmierten Streukurve $I(m)$, wie aus folgender Ableitung ersichtlich ist.

$$\tilde{I}(m) = 2\int_0^\infty I(\sqrt{m^2+t^2})\,dt; \qquad \tilde{I}'(m) = 2\int_0^\infty I'(\sqrt{m^2+t^2})\cdot\frac{m}{\sqrt{m^2+t^2}}\,dt$$

$$F(m) = \frac{-\tilde{I}'}{m} = -2\int_0^\infty I'(\sqrt{m^2+t^2})\cdot\frac{dt}{\sqrt{m^2+t^2}}$$

$$\frac{1}{2}\tilde{F}(m) = \int_0^\infty F(\sqrt{m^2+s^2})\,ds = \tag{8 a}$$

$$= -2\int_0^\infty\int_0^\infty I'(\sqrt{m^2+t^2+s^2})\cdot\frac{dt\,ds}{\sqrt{m^2+t^2+s^2}}$$

substitutieren wir nun die Variablen t, s durch Polarkoordinaten: $t = \varrho\cos\varphi$, $s = \varrho\sin\varphi$, $dt\,ds = \varrho\,d\varrho\,d\varphi$ und weiter: $m^2 + \varrho^2 = r^2$; $\varrho\,d\varrho = r\,dr$, $dt\,ds = r\,dr\,d\varphi$ so erhalten wir:

$$\frac{1}{2}\tilde{F}(m) = -2\int_0^{\pi/2}\int_m^\infty I'(r)\,dr\,d\varphi = -\pi\int_m^\infty I'(r)\,dr = \pi\cdot I(m) \tag{8 b}$$

Die Entschmierung erfordert also die Operationen der Differentiation und Verschmierung. Beide können mit Hilfe der weiter unten zu besprechenden mechanischen Hilfsmittel ohne großen Zeitaufwand und genau durchgeführt werden. Wenn diese Behelfe nicht zur Verfügung stehen, muß man zu zeichnerischen Methoden greifen.

Zur Verschmierung von $F(m)$ ist der Ausdruck

$$\tilde{F}(m) = 2\int_0^\infty F(\sqrt{m^2+t^2})\cdot dt \tag{9}$$

zu ermitteln. Wir erinnern daran, daß die $\tilde{F}(m)$-Werte als Flächen von Kurven interpretierbar sind, die am rotationssymmetrisch dargestellten Intensitätsberg $F(m)$ durch Schnitte normal zum Radius im Abstand m vom Zentrum erhalten werden. Um eine solche durch (9) dargestellte Schnittfläche zu zeichnen, hat man also für ein festes m die Funktionswerte $F(\sqrt{m^2+t^2})$ gegen t aufzutragen. Für jeden t-Wert ist dann zunächst das Argument

$$r = \sqrt{m^2+t^2} \tag{10}$$

zu bilden, was zeichnerisch durch Bestimmung der Hypothenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks mit den Katheten m und t geschieht. Aus der $F(m)$-Kurve entnimmt man dann die zur Abszisse r gehörige Ordinate und trägt sie bei der Abszisse t auf. Die Bestimmung von r und die Auftragung von $F(r)$ gegen t macht man zweckmäßig in *einer* Zeichnung, wie das Abb. 5 veranschaulicht. Man trägt das gewählte m auf der Ordinate der $F(m)$-Kurve ab, t auf der Abszisse, überträgt die Hypothenuse r auf die Abszisse und verschiebt den zugehörigen Kurvenpunkt P auf die Abszisse t, wodurch man P' erhält. Dieselbe Konstruktion führt man für eine entsprechende Zahl von t-Werten durch und erhält so eine Kurve, deren Planimetrierung im Sinne von (9) direkt auf den $\bar{F}$-Wert für das gebildete m führt. In gleicher Weise sind Hilfskurven für genügend viele m-Werte zu zeichnen.

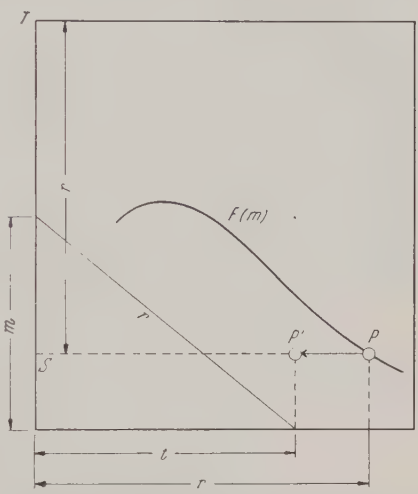

Abb. 5. Konstruktion zur Verschmierung einer Kurve $F(m)$. Die Punkte P' geben den Integranden in Formel (9)

5. Graphische Behelfe zur Durchführung der Entschmierung

Der Vorgang der Verschmierung läßt sich durch den Gebrauch einer Hyperbelschar von der Art der Abb. 6 namentlich dann sehr vereinfachen, wenn auch ein Durchleuchtungstisch zur Verfügung steht. Greifen wir den Punkt Q der Diagonale OO' heraus und fassen wir seine Abszisse (und auch seine Ordinate) als einen r-Wert auf, so haben die auf der horizontalen Linie QA liegenden Schnittpunkte mit den Hyperbeln Abszissenwerte t gemäß $t^2 = r^2 - m^2$, sie sind also nach (10) gebildet, wobei jede Hyperbel einem m-Wert entspricht, der gleich ist dem Abstand ihres Scheitelpunktes (= Ordinatenschnittpunkt) vom Ursprung 0 (denn auf der Ordinate ist $t = 0$ und daher $r = m$). Um nun mittels dieser Kurvenschar die Konstruktion von Abb. 5 nachzuahmen, brauchen wir die $F(m)$-Kurve in passender Vergrößerung nur so auf die Hyperbelschar zu legen, daß — bei parallelen Abszissen und zusammenfallenden Ordinaten — der umzurechnende Punkt P auf die Diagonale $00'$ der Hyperbelschar fällt (das kommt darauf hinaus, daß man in Abb. 5 vom Ordinatenschnittpunkt S der durch P gelegten Horizontalen die Strecke r nach oben aufträgt und den so erhaltenen Punkt T auf den Nullpunkt 0 der Hyperbelschar legt). Die Horizontale PS schneidet nun aus der darunter liegenden Hyperbelschar die zu $r = PS$ gehörigen

t-Werte heraus, und zwar für die m-Werte der betreffenden geschnittenen Hyperbeln. Diese Punkte zeichnet man nun am Durchleuchtungstisch in der obenauf liegenden $F(m)$-Kurve ein und hat damit für alle den

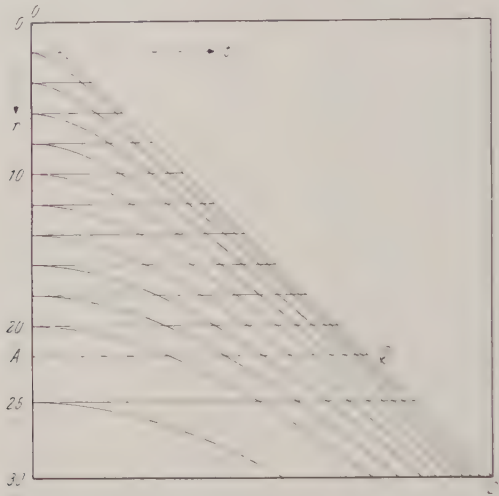

Abb. 6. Hyperbelschar zur Erleichterung der graphischen Verschmierung

m-Werten der Hyperbeln entsprechenden Schnittkurven die zugehörigen gegen t aufgetragenen Punkte auf einmal gewonnen. Nun kann man den Vorgang für andere Punkte der $F(m)$-Kurve wiederholen und erhält so gleichzeitig mehrere Schnittkurven.

Eine wesentliche Operation im Rahmen der Entschmierung ist, wie ausgeführt wurde, die Differentiation der vorgegebenen verschmierten Kurve. Es gibt verschiedene praktische Möglichkeiten, die Bestimmung der Neigung entlang der Kurve festzustellen. Über das primitivste Vorgehen, das Einzeichnen von Tangenten und Bestimmung von deren Neigung, braucht nicht weiter gesprochen zu werden. Es gibt auch bessere Methoden mit käuflichen Instrumenten. Beim Gerät der Firma Ott wird ein Spiegel an den zu messenden Punkt quer zur Kurve gestellt und solange verdreht, bis das Spiegelbild eine glatte Fortsetzung der Kurve darstellt. Die Lage des Spiegels kann dann entsprechend genau abgelesen werden. Dieses und ähnliche Instrumente zeigen aber immer nur die Neigung eines kleinen Kurvenstückes an. Um die Schwierigkeiten zumindest zu verringern, die sich aus dieser Ursache ergeben, ist in unserem Arbeitskreis ein Instrument entwickelt worden [27], mit dem die Neigung des Schmiegungskreises an eine Kurve in einem bestimmten Punkt gemessen wird. Damit sind erfahrungsgemäß bessere Messungen der Kurvenneigung möglich als mit den bisher bekannten Methoden, offenbar weil der Schmiegungskreis eine Angleichung an einen größeren Kurvenbereich ermöglicht, ein Vorgang,

der die subjektiv beste Schätzung für einen vernünftig ermittelten Kurvenverlauf beinhaltet. Bei der praktischen Durchführung bedient

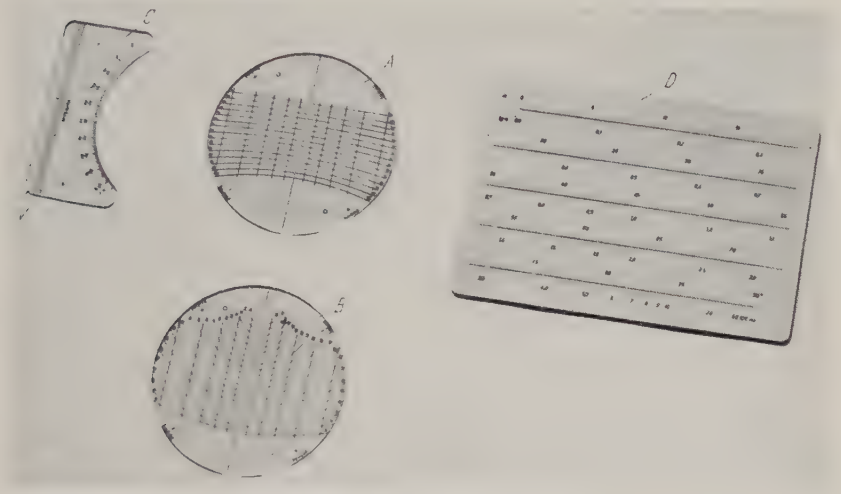

Abb. 7. Gerät zur graphischen Differentiation

man sich einer durchsichtigen Scheibe A oder B, auf der eine Serie von Krümmungskreisen markiert ist (Abb. 7). Um an einer Stelle der gegebenen Kurve Neigungstangente und Krümmung zu bestimmen, legt man die Scheibe auf die Kurve und sucht unter entsprechender Verdrehung der Scheibe jenen Krümmungskreis, der am betreffenden Punkt am besten als Schmiegungskreis paßt, wie das Abb. 8 zeigt. Die Verdrehung der Scheibe wird an einem schablonenartigen Hilfsgerät C abgelesen, dessen Marken V auf die Vertikalrichtung des Koordinatensystems eingestellt werden. Man kann auch die Scheibe in entsprechender Weise mit einer Zeichenmaschine kombinieren und die Lage an einer mit dem Handgriff in fester Verbindung befindlichen Gegenskala ablesen. Die Umrechnung des Winkels in den Tangenten-Wert erfolgt mittels der Skalentafel D.

Abb. 8. Anpassung eines Schmiegungskreises an eine Kurve FF im Punkt P

6. *Entschmierung bei endlichem Primärstrahl*

Aus apparativen Gründen kann der Primärstrahl nicht beliebig lang gemacht werden.

Wenn sich die Streukurve bis zu relativ großen Winkeln erstreckt (kleine korpuskulare Teilchen oder Fadenmoleküle [27, 28]), kann der Fall eintreten, daß der Primärstrahl nicht mehr als unendlich lang betrachtet werden darf. Wir haben nun gezeigt [13], daß sich die Methode von Guinier und Fournet auch auf diesen allgemeineren Fall erweitern läßt. Hierzu ist nötig, bei der Verschmierungsoperation eine Gewichtsfunktion $G(s)$ anzuwenden, die so bestimmt werden muß, daß sie den Einfluß der apparativen Gewichtsfunktion $P(t)$ gerade wieder aufhebt. Das ist dann der Fall, wenn gilt:

$$\int_0^{\pi/2} P(t)\, G(s)\, d\varphi = \pi/2 \text{ für jedes } r = \text{const};\ t = r\cos\varphi,\ s = r\sin\varphi \tag{11}$$

Die Integralgleichung (11) läßt sich nicht allgemein lösen, aber für einen Spezialfall konnte an anderem Orte eine befriedigende Näherungslösung gegeben werden, nämlich für einen Primärstrahl der Länge $2\,l$ und konstanter Intensität, so daß innerhalb des Bereiches von $-l$ bis $+l$: $P(t) = 1$ und außerhalb desselben: $P(t) = 0$. Dann haben wir die Gewichtsfunktion:

$$G(s) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leqslant s \leqslant l \\ 2 & \text{für} \quad l \leqslant s \leqslant l\sqrt{2} \\ \pi/2\,l \cdot s & \text{für} \quad l\sqrt{2} \leqslant s \end{cases} \tag{12}$$

Diese Funktion erfüllt (11) exakt mit Ausnahme des Gebietes $l\sqrt{2} < r < l\sqrt{3}$. Der Fehler ist jedoch ganz unbedeutend, wie bei der praktischen Erprobung immer wieder festgestellt werden konnte. Übrigens reicht im allgemeinen auch eine etwas gröbere Näherung aus, die darin besteht, daß man das mittlere Stück von $G(s)$ in (12) fortläßt und dafür das dritte Stück mit $s = l$ anstelle von $s = l\sqrt{2}$ beginnend ansetzt. Die Verschmierung mit dem letzten linearen Teil der Gewichtsfunktion $G(s)$ braucht nicht graphisch vorgenommen werden, denn sie läßt sich ganz allgemein mathematisch durchführen:

$$\int_{l\sqrt{2}}^{r} F(\sqrt{m^2+s^2}) \cdot \frac{\pi}{2\,l} \cdot s\, ds = \frac{\pi}{2\,l} \cdot \int_{\sqrt{m^2+2l^2}}^{x} F(r) \cdot r\, dr; \qquad r^2 = m^2 + s^2 \tag{13}$$

und nachdem definitionsgemäß: $F(r) = -I'(r)/r$, folgt sofort:

$$\frac{\pi}{2\,l} \int_{\sqrt{m^2+2l^2}}^{\infty} F(\sqrt{m^2+s^2}) \cdot s\, ds = \frac{\pi}{2\,l}\, I(\sqrt{m^2+2\,l^2}) \tag{14}$$

Nach (11) und (14) ist also das Entschmierungsverfahren für einen homogenen Primärstrahl endlicher Länge wie folgt: Man bildet wie bei der Methode von GUINIER und FOURNET die Hilfskurve $F(m)$ durch Differenzieren der verschmierten Streukurve und Dividieren durch die Abszisse $-m$. Diese Hilfskurve wird im Bereich $0 < s < l$ verschmiert, das heißt man bestimmt die Fläche unter der zu einem bestimmten m gehörigen Schnittkurve zwischen den vorstehenden Grenzen, desgleichen zwischen den Grenzen l bis $l\sqrt{2}$, welche Fläche doppelt zu zählen ist. Die Summe der beiden Terme wird durch π dividiert. Schließlich addiert man noch die durch die Primärstrahllänge $2\,l$ dividierte Intensität der verschmierten Streukurve an der Stelle $r = \sqrt{m^2 + 2\,l^2}$. Das ist jene Abszisse, zu der der letzte für die Verschmierung verwendete Wert von F gehört. In einer Formel zusammengefaßt haben wir:

$$I(m) = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^l F(\sqrt{m^2+s^2})\,ds + 2\int_l^{l\sqrt{2}} F(\sqrt{m^2+s^2})\,ds\right\} + \\ + \frac{1}{2\,l}\,\tilde{I}(\sqrt{m^2+2\,l^2}) \qquad (15)$$

Das vereinfachte Verfahren unterscheidet sich davon nur dadurch, daß das zweite Verschmierungsintegral weggelassen und der Endwert entsprechend geändert ist.

$$I(m) = \frac{1}{\pi}\int_0^l F(\sqrt{m^2+s^2})\,ds + \frac{1}{2\,l}\,\tilde{I}(\sqrt{m^2+l^2}) \qquad (16)$$

Es sei noch besonders auf die Normierung der Streukurve hingewiesen. Die entschmierte Kurve $I(m)$ entspricht nach unserer Festsetzung jener Primärstrahlenergie, die in einem Stück von 1 cm Länge des Primärstrahls enthalten ist. Wenn die Kleinwinkelstreuung photographisch aufgenommen und bei der Photometrierung im Verhältnis $1 : p$ vergrößert wird, beziehen sich alle Längenangaben auf die Photometerkurve. Man muß dann nur bei der weiteren Auswertung anstelle des wahren Abstandes Präparat-Film $= a$ den p-fachen Wert $a\,p$ als Abstand einer fiktiven Registrierungsebene verwenden, in der das Kleinwinkeldiagramm so groß erhalten würde wie in der Photometerkurve. Ein Primärstrahl endlicher Länge und konstanter Intensität, wie er oben vorausgesetzt wurde, ist in der Praxis allerdings nie exakt realisierbar, sondern es schließt sich außen stets ein annähernd linear abfallendes Randgebiet an. Die Intensitätsverteilung ist also etwa trapezförmig. Solange aber die Randgebiete schmal sind im Vergleich mit der integralen Primärstrahlbreite, wird man das Verfahren dennoch anwenden können und die integrale Breite anstelle der Gesamtbreite in den obigen Beziehungen verwenden.

7. *Die Geroldsche Modifikation unseres Verfahrens der Entschmierung bei endlicher Primärstrahllänge*

Es ist nach dem bisher Gesagten nicht klar, ob eine Auswertung möglich ist, wenn die Intensitätsverteilung stark von der Kastenform abweicht, also ein Trapez vorliegt, dessen abfallende Gebiete eine mit dem konstanten Teil vergleichbare Breite haben.

Nun konnte Gerold [29] zeigen, daß bei bestimmter Gestalt des Trapezes die obige Methode mit einer kleinen Modifikation anwendbar ist, wobei überraschenderweise von den beiden besprochenen Varianten das abgekürzte Verfahren die höhere Genauigkeit gibt. Bezeichnen wir die integrale Länge des Primärstrahls (sie ist in diesem Fall identisch mit der Halbwertslänge) wieder mit $2\,l$ und die Länge des linear abfallenden Randgebietes mit $2\,k$ (Abb. 9), so liegt nach Gerold das Optimum bei einem Verhältnis $k/l = 1 - 2\,\varkappa = 0{,}36$. Untersuchungen des einen von uns mit Ch. Sacken [30] haben nun ergeben, daß das Optimum allerdings von der zu entschmierenden Streukurve abhängt, jedenfalls aber stets in der Nähe des von Gerold angegebenen Wertes liegt. Es wurde im Mittel $k/l = 0{,}4$ gefunden. Auf keinen Fall ist dieses Verhältnis sehr kritisch, so daß man auch bei einem merklich abweichenden Wert eine ausreichende Genauigkeit erzielen kann. Im Vergleich mit unserem im vorigen Kapitel beschriebenen abgekürzten Verfahren für den Primärstrahl endlicher Länge besteht die von Gerold vorgeschlagene Modifikation darin, daß als obere Grenze anstelle von l der Wert $(l - k)$ zu nehmen ist. Er hat, wie aus Abb. 9 ersichtlich, die Bedeutung der halben Länge des konstanten Teils des Primärstrahls.

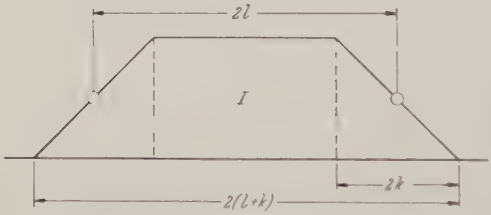

Abb. 9. Trapezförmige Intensitätsverteilung im Längsschnitt des Primärstrahls mit optimaler Dimensionierung

$$I(m) = \frac{1}{\pi}\int_0^{l-k} F(m^2 + s^2)\,ds = \frac{1}{2\,l}\,\tilde{I}(m^2 + (l-k)^2) \qquad (17)$$

Damit ist alles Wesentliche für den Fall gesagt, daß man eine *photographische Registrierung* vornimmt. Im Abschnitt VI werden auch Anweisungen gegeben, wie man die Dimensionierung des im allgemeinen eine trapezförmige Intensitätsverteilung aufweisenden Primärstrahls beeinflussen kann, um das angegebene Verhältnis von k zu l herzustellen. Liegt aber ein Primärstrahl mit praktisch rechteckiger Intensitätsverteilung vor, so wird man natürlich nicht von dieser Variante sondern dem im vorigen Abschnitt beschriebenen Verfahren Gebrauch machen.

Anders bei der *Zählrohrmessung*. Nachdem der Zählrohrspalt aus Intensitätsgründen in der Regel lang gemacht werden muß, verursacht er zusätzlich zum Primärstrahl eine weitere Verschmierung. Man sieht leicht ein, daß die Wirkung beider zusammen äquivalent ist einer fiktiven Intensitätsverteilung, gebildet durch Faltung der wahren Verteilung mit der durch den Zählrohrspalt hereingebrachten Kastenfunktion und es entsteht dann unbedingt eine Form, die an den Enden nicht mehr sehr steil abfällt. Wir haben hier zwei Fälle zu unterscheiden.

a) Der Primärstrahl selbst ist vollständig gleichmäßig belegt. Besitzt er die Länge $2\,l$ und der Zählrohrspalt die Länge $2\,z$, so resultiert durch die Faltung eine fiktive trapezförmige Intensitätsverteilung, deren linear abfallende Randgebiete je eine Breite $2\,k = 2\,z$ haben. Liegt nun z/l in der Gegend von 0,4, so kann man wiederum (17) zur Entschmierung verwenden. Man wird also bestrebt sein, das optimale Verhältnis $2\,z/2\,l = 0{,}4$ von Zählrohrspaltlänge zur Länge des gleichmäßig belegten Primärstrahls herzustellen. (Die Rollen von Zählrohrspalt und Primärstrahllänge könnten übrigens genau so gut vertauscht werden, doch wäre eine solche Anordnung im Hinblick auf die Begrenzung in der Länge des möglichen Zählrohrspaltes sehr intensitätsschwach.) Gerold hat vor allem diesen Fall im Auge gehabt. Wir müssen aber noch die zweite Möglichkeit betrachten:

b) Der Primärstrahl selbst hat bereits Trapezform, wie dies z. B. bei der Aufstellung der Kamera an der Breitseite eines strichförmigen Fokus immer der Fall ist (vgl. Abschnitt VI). Die Faltung mit dem Zählrohrspalt führt dann auf eine kompliziertere fiktive Intensitätsverteilung. Während beim Primärstrahl mit steil abfallenden Enden nur die Länge des Zählrohrspaltes für das Zustandekommen der schräg abfallenden Enden in der fiktiven Intensitätsverteilung verantwortlich war, so wirkt jetzt die bereits im realen Primärstrahl vorliegende Trapezform mit dem Zählrohrspalt zusammen. Über das Ergebnis dieser Faltung läßt sich ohne weiteres folgendes sagen.

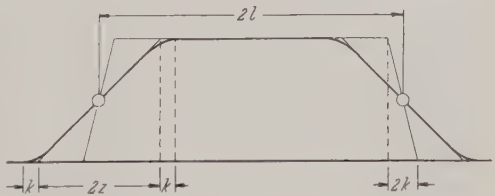

Abb. 10. Fiktive Intensitätsverteilung im Längsschnitt des Primärstrahls, entstanden durch Faltung einer trapezförmigen Verteilung mit dem Zählrohrspalt. $z = 4\,k$

α) Ist $2\,z$ wesentlich größer als $2\,k$ oder umgekehrt, so entsteht als gefaltete Form ein „Trapez mit etwas abgerundeten Ecken". Vernachlässigt man die Existenz dieser Abrundungen, das heißt verlängern wir die geradlinigen Mittelteile der Seiten bis zu den Basislinien (Abb. 10), so hat dieses Ersatztrapez eine Breite des abfallenden Teils, für die allein der größere der beiden Werte $2\,z$ bzw. $2\,k$ maßgeblich ist. Man kann also, anders ausgedrückt, die Wirkung des kleineren der beiden Werte $2\,z$ bzw. $2\,k$ in erster Näherung vernachlässigen. Abb. 10 zeigt

als Beispiel das Zusammenwirken für den Fall, daß $2z = 4\,(2k)$. Die integrale Breite der gefalteten Form ist auf jeden Fall die des ursprünglichen Trapezes.

β) $2z$ und $2k$ sind von ähnlicher Größe. Dann resultiert eine gefaltete Form, die ein „Trapez mit *erheblich* abgerundeten Ecken" darstellt. Abb. 11 zeigt das Zusammenwirken für $2z = 2k$. Es ist klar,

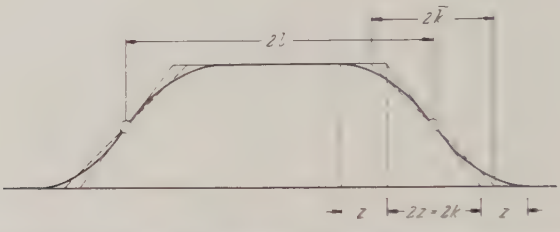

Abb. 11. Fiktive Intensitätsverteilung im Längsschnitt des Primärstrahls, entstanden durch Faltung einer trapezförmigen Verteilung mit dem Zählrohrspalt. $z = k$

daß die für die reine Trapezform geltende Auswertung hier nicht mehr exakt ist; immerhin stellt das eingezeichnete Ersatztrapez, wie die nähere Rechnung zeigt, eine brauchbare Näherung dar. Die Breite $2\bar{k}$ seines abfallenden Teiles entspricht dem Ansatz

$$2\bar{k} = \begin{cases} 2z + \dfrac{2k}{3} & \text{wenn} \quad z > k \\ 2k + \dfrac{2z}{3} & \text{wenn} \quad k > z \end{cases} \tag{18}$$

den man ganz allgemein als Interpolationsformel für die Berechnung des Ersatztrapezes bei allen Verhältnissen von $2z$ zu $2k$ verwenden kann. Zum größeren der beiden Werte wird also ein Drittel des kleineren addiert.

Man hat also Primärstrahlform und Zählrohrspalt so abzugleichen, daß $2\bar{k}/2l = 0{,}4$. Je mehr dabei $2k$ des ursprünglichen Primärstrahls und $2z$ voneinander verschieden sind, um so weniger weicht das durch (18) gegebene Ersatztrapez von der gefalteten Form ab und um so geringer sind die Fehler der Auswertung.

Noch ein letzter Hinweis scheint angebracht. Wie man aus Formel (17) unmittelbar ersieht, fällt das Geroldsche Verfahren mit dem von Guinier und Fournet für den unendlich langen Primärstrahl zusammen, sobald $(l - k)$, das ist die halbe Differenz von Primärstrahl- und Zählrohrspaltlänge größer ist als die Ausdehnung der Streukurve. Diese Differenz ist im Optimum etwa das 0,6-fache der reinen Primärstrahllänge. Es ist somit der Fall möglich, daß diese für sich allein als unendlich betrachtet werden kann, nicht aber die fiktive Verteilung, die beim Arbeiten mit dem Zählrohr wirksam ist.

8. Gebrauch elektronischer Rechenmaschinen

Die Entwicklung der elektronischen Rechenmaschinen und der Umstand, daß entsprechend leistungsfähige Einrichtungen in den meisten großen Städten heute schon zur Verfügung stehen, legt den Gedanken nahe, die Verschmierung vollautomatisch durchzuführen. Wir haben in diesem Sinne den der Entschmierung zugrundelegenden Rechenvorgang programmieren lassen[2]. Man braucht dann lediglich fallweise die numerischen Werte der experimentellen Kurve anzugeben und alles übrige macht die Maschine. Voraussetzung ist, daß die stets mit kleinen Unregelmäßigkeiten behaftete experimentelle Kurve vor Weitergabe der Werte an die Maschine geglättet wird, wozu sich eine Vorrichtung nach Art des beschriebenen Tangentenbestimmungsgerätes bestens eignet.

Wir haben noch zu wenig Erfahrung, um ein abschließendes Urteil über die Zweckmäßigkeit einer solchen Behandlung des Problems abzugeben. Allenfalls könnte es sich als nützlich erweisen, an die Einrichtung einer Zentralstelle zu denken, die durch den Besitz der Programmierung in der Lage ist, die eingeschickten Tabellen der experimentellen Werte kurzfristig umzurechnen. Die Rechendauer liegt bei einer entsprechend leistungsfähigen Maschine in der Größenordnung einer Minute.

III. Breitenentschmierung

1. Endliche Breite

Meist wird der strichförmige Primärstrahl der Breite nach so schmal ausgeblendet, daß man die durch den Querschnitt bewirkte Verschmierung vernachlässigen kann. Man wählt schon deshalb die Primärstrahlbreite gering, da sie ja die Auflösung der Kleinwinkelaufnahme begrenzt. Will man aber den äußeren Teil der Streukurve untersuchen, so fällt dieser Gesichtspunkt weg und es erhebt sich dafür die Notwendigkeit, die Energie des Primärstrahls zu erhöhen, weil die Intensität der Kleinwinkelstreuung bei größeren Winkeln sehr rasch abnimmt. Am einfachsten erreicht man dies durch Verbreiterung des Primärstrahls, wodurch allerdings die Frage der Breitenverschmierung aktuell wird.

Wenn wir die Intensitätsverteilung des Primärstrahls der Breite nach — sein Profil — mit $Q(x)$ bezeichnen, dann ist, wie eingangs erwähnt, die verschmierte Streukurve einfach durch die Faltung mit dem Profil gegeben:

$$\hat{I}(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(m - x)\, Q(x)\, dx \tag{19}$$

Manchmal genügt es, diese Modifikation durch einen Parameter zu berücksichtigen. Das geht dann, wenn die Streukurve der GUINIERschen

[2] Der Firma Remington Rand, Filialdirektion Graz, insbesonders Herrn Dr. KOUSEK, Filialleiter in Graz und Herrn Dipl.-Ing. LEITNER, Wien, sind wir für ihre Hilfe zu bestem Dank verpflichtet.

Näherung entspricht und der Primärstrahlquerschnitt ebenfalls als Gausssche Glockenkurve betrachtet werden kann. Dann ergibt sich durch die Verschmierung wieder eine Gausssche Glockenkurve, deren Halbwertsbreite die pythagoräische Summe der Halbwertsbreiten von I (sei $= B$) und von Q (sei $= b$) ist. Im selben Verhältnis ist der scheinbare Streumassenradius $\hat{R}$, der aus der Guinier-Auftragung der breitenverschmierten Streukurve $\hat{I}$ erhalten wird, gegenüber dem wahren Streumassenradius R verkleinert. Es besteht also die einfache Beziehung:

$$R = \hat{R} \cdot \sqrt{B^2 + b^2}/B \tag{20}$$

Formel (20) kann zwar in ausreichender Näherung auch dann verwendet werden, wenn das Profil des Primärstrahls einer Gaussschen Glockenkurve nur ähnlich ist; bei größeren Abweichungen wird es aber doch wünschenswert sein, eine wirkliche Entschmierung durchzuführen. Zu diesem Zwecke formen wir zunächst Formel (19) etwas um, indem wir $I(m - x)$ in eine Taylor-Reihe um den durch die Abszisse m bestimmten Punkt entwickeln.

$$\begin{aligned} \hat{I}(m) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [I(m) - I'(m)\, x + I''(m)\, x^2/2 \ldots]\, Q(x)\, dx \\ &= I(m) - I'(m)\, \bar{x} + I''(m)\, \overline{x^2}/2 \ldots \end{aligned} \tag{21}$$

Die Integration ergibt unmittelbar die Mittelwerte der Potenzen von x, wenn wir $Q(x)$ als normierte Verteilungsfunktion ansehen. Die Intensität von I ist dann derart normiert, daß sie der integralen Intensität des Primärstrahlquerschnitts, konzentriert auf eine unendlich kleine Breite, entspricht. Wir können nun sofort erreichen, daß das zweite Glied der Reihenentwicklung verschwindet, indem wir $\bar{x}$ gleich 0 machen. Das geschieht dadurch, daß wir als Nullpunkt der Abszisse den Schwerpunkt des Primärstrahlprofils wählen[3], für den ja $\bar{x}$ definitionsgemäß verschwindet. In erster Näherung kann also bei Wahl dieses Nullpunktes die unverschmierte gleich der verschmierten Streukurve gesetzt werden. In zweiter Näherung besteht die Differenz im Glied $I''(m)\, \overline{x^2}\, 2$ oder $I''(m)\, \xi^2/2$, wenn wir die mittlere quadratische Streuung des Profils $\sqrt{\overline{x^2}}$ mit ξ bezeichnen. Anstelle von $I''(m)$ kann auch $\hat{I}''(m)$ genommen werden, weil die beiden Kurven ja bereits in erster Näherung gleich sind.

[3] Man findet den Schwerpunkt, indem man die Intensitätsverteilung $Q(x)$ mit x multipliziert und die Fläche unter der so erhaltenen Kurve planimetriert. Dieser Wert wird durch die Fläche des Querschnitts dividiert. Der Quotient ist die Abszisse des Schwerpunkts. Es ist zweckmäßig, den provisorischen Nullpunkt, von dem aus x gezählt wird, etwa in der Mitte des Primärstrahls anzunehmen. Dieses etwas umständliche Verfahren kann wesentlich vereinfacht werden, wenn man das Profil des Primärstrahls durch ein Dreieck approximieren kann. Man findet dann die Abszisse des Schwerpunkts, indem man die Strecke zwischen dem Mittelpunkt der Basis und dem Fußpunkt der Spitze im Verhältnis 1 : 2 unterteilt.

Diese Differenz erhalten wir sofort wieder aus der Reihenentwicklung:

$$\frac{1}{2}\,[\hat{I}(m+\xi)+\hat{I}(m-\xi)] = \hat{I}(m)+\hat{I}''(m)\,\frac{\xi^2}{2} \qquad (22)$$

woraus wir unmittelbar die Entschmierung in zweiter Näherung haben:

Zweite Näherung

$$I(m) = \hat{I}(m) - \{[\hat{I}(m+\xi)+\hat{I}(m-\xi)]/2 - \hat{I}(m)\} \qquad (23)$$

Der Gang der Entschmierung ist demnach wie folgt. Zuerst wird der Schwerpunkt des Primärstrahlquerschnitts bestimmt und als Nullpunkt der Abszissenzählung genommen. Dann ermittelt man graphisch $\xi = \sqrt{\overline{x^2}}$ [4]. Um nun beim Punkt m zu entschmieren, errichtet man rechts und links davon im Abstand ξ die Ordinaten und verbindet die beiden Kurvenpunkte durch eine Sehne. Der Abstand des Sehnenmittelpunktes vom Meßpunkt $\hat{I}(m)$ ist die Korrektur und wird in verkehrter Richtung zu $\hat{I}(m)$ dazugeschlagen.

Bei der praktischen Durchführung dieses Verfahrens sieht man bereits, daß die Korrektur auch bei sehr breitem Primärstrahl immer nur klein ist, so daß es nicht lohnt, die Entschmierung für eine höhere Näherung zu erweitern, was an sich durchaus möglich ist. Nur eine Bemerkung hiezu ist noch angebracht. Wenn das Profil symmetrisch ist, fallen in der Reihenentwicklung nach (21) alle ungeraden Potenzen fort. Die zweite Näherung fällt dann bereits mit der dritten zusammen. Bei asymmetrischem Profil ist das nicht der Fall. Die Näherung ist dann nicht ganz so gut. Es ist demnach vorteilhaft, den Primärstrahlquerschnitt möglichst symmetrisch zu machen.

Es darf nicht vergessen werden, daß experimentell natürlich immer eine Streukurve vorliegt, die gleichzeitig längenverschmiert ist. Die Korrekturen für Länge und Breite können aber unabhängig voneinander und in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden. Dabei ist nur vorausgesetzt, daß das Profil des Primärstrahls über die ganze Länge hinweg das gleiche ist, eine Bedingung, die wohl immer hinreichend erfüllt wird.

2. „*Unendliche*" *Breite*

Von Knapp [31] ist ein Verfahren vorgeschlagen worden, bei dem nur eine Breitenverschmierung auftritt. Zu diesem Zweck muß der Primärstrahl sehr kurz und in der Breite sehr groß (praktisch unendlich groß) und außerdem von konstanter Intensität gemacht werden. Er erscheint dann wieder als dünner Strich mit einer scharf begrenzten

[4] Man findet $\overline{x^2}$, indem man das Profil des Primärstrahls mit x^2 multipliziert, die Fläche unter der so erhaltenen Kurve planimetriert und durch die Fläche des Profils dividiert. Falls das Profil in ausreichender Näherung durch ein Dreieck approximiert werden kann, ist diese umständliche graphische Methode nicht nötig. Wenn wir die halbe Basis mit b und den Abstand des Basismittelpunktes vom Fußpunkt der Höhe mit a bezeichnen, gilt nach elementarer Rechnung:

$$\overline{x^2} = 1/6\,(b^2 + a^2/3).$$

Kante. Die Kleinwinkelstreuung wird aber diesmal in der Verlängerung des Striches und nicht, wie sonst üblich, senkrecht dazu gemessen. Das hat den Vorteil, daß die Verschmierung und Entschmierung mathematisch besonders einfach dargestellt werden können. Die verschmierte Kurve ist nämlich das Integral der unverschmierten und die letztere wird einfach durch Differentiation erhalten:

$$\hat{I}(m) = \int_m^\infty I(x)\,dx; \qquad I(m) = -\hat{I}'(m) \tag{24}$$

Als Nullpunkt der Abszissenzählung ist die Kante des Primärstrahls anzusehen. Man kommt also theoretisch bis zu beliebig kleinen Winkeln, ein weiterer bestechender Zug dieser Methode. Praktisch hängt ihre Anwendbarkeit aber davon ab, ob es gelingt, einen über eine hinreichende Strecke konstanten Primärstrahl herzustellen, der auf einer Seite mit scharfer Kante abbricht. Von Knapp wurde zu diesem Zwecke eine Modifikation der von dem einen von uns angegebenen U-Kamera [6] vorgeschlagen.

Zur Anwendung des Verfahrens dürften folgende Bemerkungen angebracht sein. Wenn man von der Möglichkeit Gebrauch machen will, wirklich zu extrem kleinen Winkeln vorzudringen, dann wird die von der Dicke des Primärstrahls herrührende Verschmierung nur vernachlässigt werden dürfen, wenn der Strich extrem dünn ist, was einerseits die Primärintensität sehr stark herabsetzt und andererseits zur Gefahr einer Blendenstreuung der die Dicke abgrenzenden Schneiden gerade im Streubereich des Präparates führt. Wählt man den Primärstrahl aber dicker, so erspart man bei der Auswertung des inneren Teils der Streukurve nicht die durch die Dicke des Primärstrahls notwendig werdende Entschmierung (die unserer früheren Längenentschmierung mit begrenzter Primärstrahllänge entspricht), hat also keinen Arbeitsgewinn. Es bleibt aber immer noch der Vorteil, daß man die Möglichkeit hat, zu extrem kleinen Winkeln vorzudringen. Allerdings darf man nicht übersehen, daß die nun auftretende zweidimensionale Verschmierung zu einem großen „Ballast" an Intensität führt, der die Genauigkeit der Messung beträchtlich verringert. Es kommt nämlich darauf hinaus, daß wohl hohe Intensitäten auftreten, die eigentliche Streukurve sich aber aus verhältnismäßig kleinen Differenzen dieser hohen Intensitäten ergibt.

Interessiert man sich aber nicht für die extrem kleinen Winkel, so kann man bei vernünftiger Dicke des Striches auf die Eliminierung der von dieser herrührenden Verschmierung wohl verzichten, erkauft aber die bequemere Entschmierung mit einem erheblichen Intensitätsverlust, der im Wesen der von Knapp vorgeschlagenen Ausblendung liegt.

Jedenfalls ist das Verfahren praktisch noch nicht genügend erprobt, um ein abschließendes Urteil über seine Nützlichkeit zu fällen.

IV. Spaltverschmierung bei orientierten Präparaten

Es sei nochmals daran erinnert, daß sich die bisherigen Ausführungen auf unorientierte Präparate beziehen, bei denen ein punktförmig ausgeblendeter Primärstrahl ein rotationssymmetrisches Kleinwinkeldiagramm erzeugen würde. Es soll nun kurz auf die Frage eingegangen werden, wie sich die Verhältnisse bei der Längenverschmierung ändern, wenn eine Orientierung vorliegt. Alle Faserstoffe enthalten längliche stäbchen- oder fadenförmige Teilchen, die entweder von Natur aus mehr oder minder gut mit ihrer Längsachse nach der Faserachse ausgerichtet sind oder durch die Herstellungsbedingungen leicht in eine solche „Faserstruktur" gebracht werden können. Ein ideal orientiertes Präparat würde ein sehr anisotropes Kleinwinkeldiagramm liefern, das sich in Richtung normal zur Faserachse zu viel größeren Winkeln erstreckt als quer dazu.

So hat Hosemann [11] die Kleinwinkelstreuung der orientierten Cellulose unter der Annahme behandelt, daß die Micellen als parallel stehende Ellipsoide ohne interferenzmäßige Wechselwirkung betrachtet werden können. In diesem Modell sind sowohl die Längen- als auch die Breitenstreukurven identisch mit Streukurven von Kugeln, deren Durchmesser gleich der großen, bzw. kleinen Achse der Ellipsoide ist.

Auch bei anderer Form der stäbchenförmigen Teilchen haben wir immer zwei Hauptstreukurven, die Querschnittsstreukurve I_q senkrecht zur Teilchenlänge und die Längenstreukurve I_l parallel dazu. Bei der üblichen Anordnung der Faser parallel zum Primärstrich besteht dann die ganze Verschmierung nur darin, daß über die Längenstreukurve integriert wird, was einen weiter nicht interessierenden konstanten Faktor gibt. Registriert wird also praktisch nur die Querschnittsstreukurve, die nur von Form und Größe des Querschnitts abhängt. Eine Entschmierung ist nicht notwendig. Auch die Längenstreukurve kann prinzipiell registriert werden, wenn man die Faserachse senkrecht zum strichförmigen Primärstrahl stellt. Allerdings muß die Orientierung wirklich vollkommen sein, so daß die Breitenstreukurve exakt parallel zum Primärstrahl liegt. Eine geringe Verwacklung macht eine Auswertung in diesem Sinne bereits unmöglich.

Praktisch liegt aber immer der Fall einer unvollkommenen Orientierung vor, das heißt die Teilchenlängsachsen schließen endliche, wenn auch kleine Winkel mit der Faserachse ein. Das von einem punktförmigen Primärstrahl erzeugte Diagramm ist dann ebenfalls verwackelt, die Richtungen der Kleinwinkelstreuung einzelner Partien des Präparates liegen unter Winkeln zur Hauptrichtung, die der Verwackelung der Stäbchenrichtungen im Präparat entsprechen. Es entsteht dann ein fächerförmiges oder, wenn die Teilchenlängen nicht sehr groß sind, ein ovales Diagramm. Wenn wir uns das unverschmierte Kleinwinkeldiagramm einer Faser als Intensitätsberg vorstellen und die Faserachse parallel zur Längsrichtung des Primärstrahls einstellen, dann gibt die Fläche eines im Abstand m vom Mittelpunkt parallel zur Primär-

strichlänge geführten Schnittes die spaltverschmierte Intensität. Wie aus Abb. 12 ersichtlich, besteht diese Schnittkurve aus einer Superposition von Schnitten durch die Streudiagramme der verwackelten Einzelteilchen. Betrachten wir z. B. ein Stäbchen, das unter einem Winkel α gegen den strichförmigen Primärstrahl geneigt ist, dann gibt der in einem Abstand m vom Primärstrahl geführte Schnitt einen Wert der Querschnittsstreukurve, der einem Argument $m \cos \alpha$ entspricht. Dies unterscheidet sich aber nur wenig von m. Die Differenz beträgt selbst bei einem verhältnismäßig großen Verwacklungswinkel von $\alpha = 20^0$ erst 4%. Daher können wir sagen, daß auch bei unvollkommener Orientierung und Parallelstellung der Faserachse mit dem Primärstrahl in erster Näherung die verschmierte Streukurve mit dem Querschnittsfaktor identisch ist.

Abb. 12. Schematische Darstellung der Kleinwinkelstreuung von langen stäbchenförmigen Teilchen
a) bei vollkommener Orientierung, *b*) bei unvollkommener Orientierung
(Der Übersichtlichkeit halber sind nur drei Lagen berücksichtigt. Die im Abstand m gemessene Intensität ist gleich dem Integral über die strichlierte Linie

Bei der vorstehenden Betrachtung war allerdings stillschweigend vorausgesetzt, daß die Teilchen sehr lang sind, die Ausdehnung der Längenstreukurve also vernachlässigt werden kann. Wenn das nicht der Fall ist, dann stimmt die Betrachtung zwar noch immer bei großen Streuwinkeln (großem m), wird aber um so unzuverlässiger, je kleinere Streuwinkel man betrachtet. Das kommt daher, daß die Längenstreukurve nun nicht mehr parallel zum Primärstrich liegt und dadurch einen *absoluten* Abstandsunterschied erzeugt — maximal $b \cdot \sin \alpha$, wenn wir die halbe Breite der Längenstreukurve mit b bezeichnen —, der sich natürlich *relativ* um so stärker auswirkt, je kleiner der mittlere Abstand m ist. Übrigens ist ja auch der Sinus bei kleineren Winkeln viel stärker veränderlich als der Cosinus.

Recht ungünstig liegen die Verhältnisse, wenn die Orientierung so schlecht ist, daß die obigen Betrachtungen nicht mehr über den ganzen Streubereich anwendbar sind. Erst recht gilt dies, wenn man sich schon nahe der völligen *Un*ordnung befindet, der Zustand des Präparates also besser durch die Bemerkung gekennzeichnet ist, daß die *Un*ordnung keine vollständige sei, sondern merkliche Orientierungseffekte vorliegen. Ein allgemein anwendbares Entschmierungsverfahren für diese Fälle gibt es nicht und es besteht auch keine Aussicht, daß ein solches entwickelt werden kann. Man hilft sich dann am besten, indem man versucht, den anderen Grenzfall der völligen Isotropie herzustellen. Wenn es sich um ein Faserpräparat handelt, kann man zu diesem Zweck etwa die Fäden in kurze Stücke schneiden und diese in regelloser Lage in eine Kapillare füllen. Es ist allerdings zu bemerken, daß das Zerstören der Ordnung oft mehr Schwierigkeiten macht als das Herstellen einer solchen durch Deformation. Es zeigt sich nämlich, daß Faserstückchen, wenn sie erheblich länger als dick sind, beim Einfüllen in eine Kapillare dazu neigen, sich mit ihrer Längsachse quer zur Kapillarenachse zu stellen, also zu orientieren. Die Erzielung einer Länge, welche die Dicke nicht wesentlich überschreitet, erfordert aber oft mühsames Herstellen von Mikrotomschnitten, ein Verfahren, das für Routinemessungen schwerlich in Frage kommt. Ein einfacher, oft zum Ziel führender Ausweg ist ein überaus lockeres Einschütten. Jedenfalls muß aber durch eine Weitwinkelaufnahme festgestellt werden, ob die vollständige Isotropierung des Präparates gelungen ist. Allenfalls kann ein Rest von Orientierung durch Drehen der Kapillare oder der Küvette während der Aufnahme unschädlich gemacht werden. Es ist vielleicht nicht überflüssig, hier darauf hinzuweisen, daß es bei der Frage von Orientierung oder Unorientierung nur auf den makroskopischen Gesamtzustand ankommt. Es schadet nichts, wenn die Teilchen selbst innerhalb großer Teilbereiche parallel liegen. Wenn nur ein punktförmig ausgeblendeter Primärstrahl ein rotationssymmetrisches Kleinwinkeldiagramm erzeugt, ist das Präparat hinsichtlich der Verschmierung und Entschmierung als unorientiert zu betrachten.

Wir können den Unterschied zwischen orientierten und unorientierten Präparaten auch noch von einer anderen Seite beleuchten. Wir nehmen zunächst ein völlig orientiertes Präparat und messen die Querschnittstreukurve, wobei es nach dem oben Gesagten gleichgültig ist, ob wir einen punktförmig oder strichförmig ausgeblendeten Primärstrahl verwenden. Nun machen wir das Präparat völlig unorientiert — natürlich ohne die innere Struktur zu ändern. Bei einer Aufnahme mit punktförmigem Primärstrahl ist jetzt die Streuintensität, die sich früher an einer Stelle im Abstand m vom Mittelpunkt befunden hat, auf einen Kreis vom Radius m verteilt, die Streukurve unterscheidet sich daher von der reinen Querschnittstreukurve bloß durch einen Faktor $\sim 1/m$, den wir in Analogie zur Kristallstrukturanalyse als LORENTZ-Faktor bezeichnen wollen. Diese Überlegung gilt auch dann noch, wenn das Präparat nicht völlig unorientiert ist. Die Streuintensität verteilt sich

dann auf Kreisbögen, deren Länge ebenfalls dem Radius m proportional ist.

Wenn wir einen strichförmigen Primärstrahl verwenden, tritt aber ein Unterschied auf. Beim Präparat mit hinreichend guter Faserorientierung erhalten wir die Querschnittstreukurve, beim völlig unorientierten Präparat die spaltverschmierte totale Streukurve, die nach Entschmierung und Multiplikation mit m (Eliminierung des LORENTZ-Faktors) eine mit der ersteren übereinstimmende Kurve ergeben sollte. Dieser von uns postulierte Zusammenhang [32] konnte von P. H. HERMANS [33] experimentell bestätigt werden.

V. Ein mechanisches Verschmierungsgerät

1. Prinzip und Konstruktion nach Gerold

Wir haben im Abschnitt II 4 gesehen, daß die Entschmierung nach dem von GUINIER und FOURNET gegebenen Weg in drei Schritten erfolgen kann, deren einer die Verschmierung einer Hilfsfunktion $F(m)$ ist.

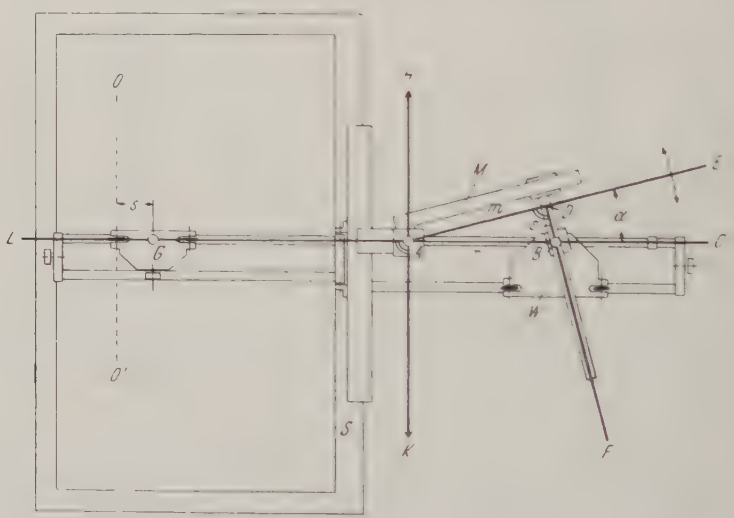

Abb. 13. Schema des mechanischen Verschmierungsgerätes nach GEROLD

Dazu muß das Integral

$$\frac{1}{2} \cdot \tilde{F}(m) = \int_0^\infty F(\sqrt{m^2 + s^2})\, ds = \int_0^\infty F(r)\, ds; \qquad r^2 = m^2 + s^2 \qquad (25)$$

bestimmt werden. Wenn man diese Operation graphisch vornimmt, ist also der Funktionswert $F(r)$ vom Argument r über der Abszisse s

aufzutragen und die Fläche unter der so erhaltenen Kurve zu planimetrieren. Diese Abszissentransformation kann nach einer Idee von Gerold [29] mechanisch durchgeführt werden (Abb. 13). Das dargestellte Gerät kann in der Ordinatenrichtung entlang der Schiene S also parallel zu HK verschoben werden. An dem Punkt A ist drehbar der Arm M angebracht. In der dargestellten Lage hat er die Richtung AE. An diesem Arm kann eine Führung mit dem zu M senkrechten Lineal DF in jedem Abstand m von A festgeklemmt werden. Dieses Lineal kann in einer Führung B gleiten, die ihrerseits drehbar und auf dem Arm AC verschieblich ist. Wir entnehmen aus der Abbildung, daß die Abschnitte zwischen den Kreuzungspunkten AB und D in der gleichen Beziehung zueinander stehen wie r, m und s gemäß (25). Da m und s im Apparat beliebig variierbar sind (m durch Verschieben der Führung des DF Armes, bzw. s durch Verdrehung des Armes M um A), können die drei Abschnitte zur Darstellung dieser Strecken verwendet werden. Nun ist B mit dem auf der Querschiene L sitzenden Stift G eines Planimeters durch einen über D laufenden Schnurzug verbunden. Will man für eine vorgegebene Funktion F die „Schnittkurven" für ein bestimmtes Argument m gemäß (25) erhalten, so hat man damit zu beginnen, daß der Arm DF an der richtigen Stelle am Arm M festgestellt, also m fix eingestellt wird. Dann legt man die zu verschmierende Kurve unter die rechte Seite des Gerätes, so daß ihre Ordinate mit HK zusammenfällt und fährt nun mit einem in B eingesetzten Stift die Kurve ab (in Wahrheit kann der Stift an jeder mit dem Wagen W in starrer Verbindung befindlichen Stelle sitzen und man wird ihn aus Gründen der besseren Sichtbarkeit der nachzufahrenden Kurve unterhalb des Wagens anbringen). Die Bewegung in der Ordinatenrichtung wird dadurch möglich, daß der Querarm LC am Rahmen S entlang rutscht; zur Bewegung in der Abszissenrichtung — nach rechts zum Beispiel — muß der Arm M unter Vergrößerung des Winkels α gedreht werden, denn bei festem m nimmt dadurch s und damit auch r zu. Die kleinste Abszisse, von der ab das Nachfahren der Kurve einsetzen kann, ist natürlich der vorgegebene m-Wert. Überlegen wir einmal, welche Bewegung bei diesem Abfahren der Kurve der Stift bei G ausführt. Zunächst erkennen wir, daß eine rechts-links-Verschiebung von G in solchem Maße stattfindet, wie sich die Länge des von B über D nach A laufenden Teiles des Schnurzuges ändert. Wenn sie z. B. größer wird, so muß wegen der konstanten Gesamtlänge $BDAG$ die Strecke AG um den gleichen Betrag kleiner werden, das heißt G rutscht nach rechts. Da m festgestellt ist, wird nur eine Verlängerung von s ein Verschieben von G nach rechts bewirken können, das heißt also, eine Änderung von s um ds verursacht eine Verschiebung von G nach rechts um den gleichen Betrag ds. Damit ist die Abszisse von G, gemessen ab der Linie OO', unmittelbar die Größe s. Der Veränderung der Ordinate beim Entlangfahren der Kurve wird wegen der horizontalen Verbindung von B und G unverändert auf G übertragen. Wenn aber die einem bestimmten $r\,(=\sqrt{m^2+s^2})$ entsprechende Ordinate danach durch G beim zuge-

hörigen s-Wert aufgetragen wird, so ist die vom Weg des Fahrstiftes G mit den Koordinaten eingeschlossene Fläche einfach durch das Integral

$$\int_0^\infty F(\sqrt{m^2+s^2})\, ds$$

gegeben.

Was nun die Präzision dieses Gerätes betrifft, so gibt Gerold selbst die maximale Ungenauigkeit in der Bewegung von G auf AL mit 0,5 mm an.

Die Ungenauigkeit hat offenbar zwei wesentliche Ursachen. Erstens ist das Ausmaß der Dehnung des Schnurzuges von der Bewegungsrichtung abhängig (weil einmal die Reibung in Richtung des Spanngewichtszuges und das zweite Mal entgegengesetzt wirkt) und zweitens umschlingt der Schnurzug ein Stück des Umfanges der in A befindlichen Rolle. Dies stellt eine Abweichung von der idealen Schnurführung dar, die einen Knick bei A aufweisen sollte. Der Umstand, daß das umschlungene Stück der in A befindlichen Rolle veränderlich ist, macht es unmöglich, den Knick fehlerlos durch die Kurve zu ersetzen, welche durch die Rolle bedingt wird. Wenn man die Rolle klein baut, um diesen Fehler gering zu halten, so muß man eine dünne und biegsame Schnur wählen, was zwangsläufig wieder einen größeren Fehler durch die elastische Dehnung verursacht.

Zu der Ungenauigkeit in der Bewegung von G entlang AL kommen aber sicherlich noch unerwünschte Bewegungen in der Ordinatenrichtung infolge der elastischen Eigenschaften der Laufschienen L für den Planimeteranschluß G sowie C für den Fahrstift B. Trotzdem bildet die Geroldsche Konstruktion bestimmt die beste Form für die Erprobung der praktischen Anwendungsmöglichkeit des kinematischen Prinzips, weil sie dessen einfachste Realisierung darstellt. Zur Ausschaltung der beschriebenen Fehlerquellen wurde ein nach dem bewährten Prinzip arbeitendes Gerät neu konstruiert.

2. *Die Neukonstruktion*

Bei der Konstruktion dieses Gerätes sind wir davon ausgegangen, daß zur Vermeidung von elastischen Dehnungsfehlern anstelle der von Gerold verwendeten Schnur Stahlseile und -drähte benützt werden sollen, die bei den in Betracht kommenden Kräften und Längen praktisch keine elastische Dehnung aufweisen. Für die Erfüllung dieser Forderung genügt ein Drahtdurchmesser von etwa 0,2 mm. Soll eine tragbare Lebensdauer der Drähte erzielt werden, so ist ein Rollendurchmesser erforderlich, der mindestens das 100-fache der Drahtstärke, also 20 mm beträgt. Es wäre daher nicht mehr möglich, die Rolle bei A so klein zu gestalten, daß die dadurch entstehende Abweichung von der idealen Anordnung vernachlässigt werden darf. Um den bei dieser Konstruktion unvermeidbaren Fehler zu umgehen, sind

wir vom GEROLDschen Prinzip der Bewegungsübertragung mittels eines von B über D und A nach G laufenden Seils überhaupt abgegangen.

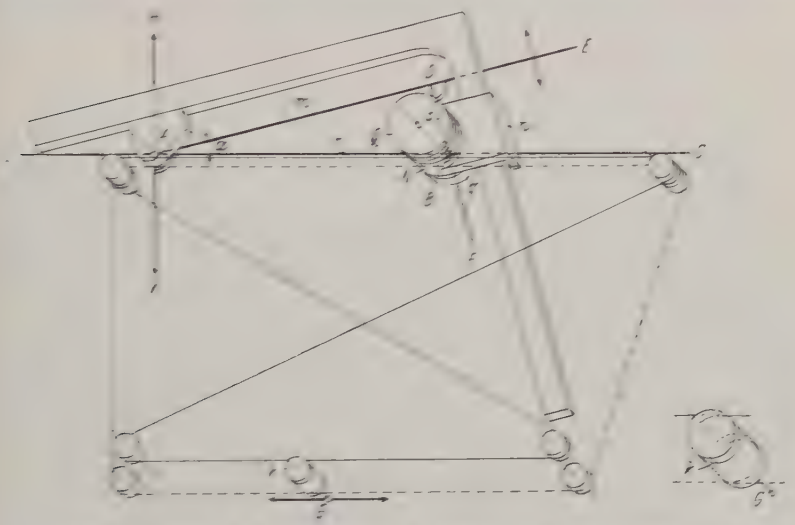

Abb. 14. Schema der Verstärkungsstufe des verbesserten Verstärkungsgerätes

Wenn bei GEROLD die Änderung der Länge von s durch einen Schnurzug eine entsprechende Verschiebung von G verursacht, so wird nunmehr die gleiche Änderung zunächst in die Drehung einer Rolle g verwandelt, die auf DF abrollt, wobei sie sich aber gleichzeitig nur in AC bewegen kann. Man versteht die Wirkungsweise wenn man das Schema der Abb. 14 welches das neue Gerät von unten gesehen zeigt mit dem der alten in Abb. 13 vergleicht. Das wesentliche Konstruktionselement ist das rechtwinkelige Lineal ADF, welches den Linealen AE und DF der GEROLDschen Konstruktion entspricht. Das Verändern der Größe von m erfolgt in der Weise, daß man eine passende Stelle des m entsprechenden Linealschenkels an einer in A frei drehbaren Lasche festklemmt. Die Rolle g wird durch die Lasche n entlang dem Lineal DF geführt und das Abrollen ihres Umfanges entspricht dabei der Veränderung von s. Die Rolle g ist im Punkt B drehbar im Fahrlagerträger gelagert (in Abb. 14 weggelassen, in Abb. 15 mit T bezeichnet), der sich seinerseits nur in der Richtung AC verschieben kann. Nun ist das Problem zu lösen, wie man die Drehung der Rolle g relativ zur Lasche n in eine genau entsprechende Bewegung des Planmeteranschlusses G verwandelt. Dazu dient ein Stahlseil (ausgezogen gezeichnet), das einerseits mit seinen beiden Enden an der Trommel Q befestigt ist, über Umlenkrollen zum Planmeteranschluß führt und die an diesem sitzende Rolle k umschlingt. Man versteht, daß die Drehung von g eine Bewegung von G bewirken würde, wenn sich die Rolle k

nicht drehen könnte. Man hätte aber damit die Drehung von q relativ zu n nicht fehlerlos in eine Verschiebung von G übergeführt, denn:

1. Die Drehung des rechtwinkeligen Lineals um A, die ja mit einer Verschiebung von q entlang DF notwendig verbunden ist, bewirkt, daß q außer der durch Abrollen verursachten Drehung auch noch die Drehung des Winkellineals um A mitmacht.

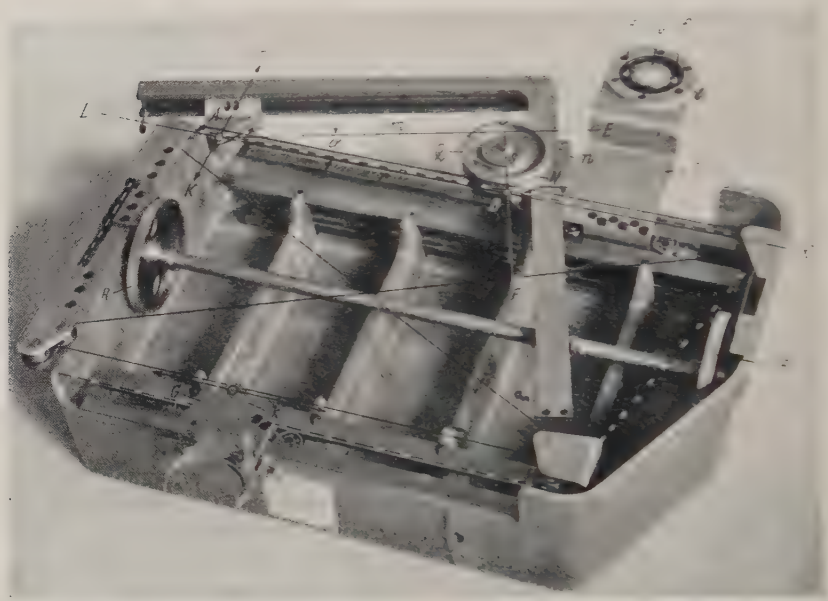

Abb. 15. Das neue mechanische Verschmierungsgerät, von unten gesehen

2. Mit dieser Drehung ist eine Verschiebung von q entlang CL verknüpft, die ebenfalls eine nicht gerechtfertigte Verschiebung von G nach sich ziehen würde.

Diese beiden Bewegungen macht nun gerade auch die Lasche n mit, so daß man an der Lasche n nur eine Trommel N fix und gegen n nicht verdrehbar anzubauen braucht (die gleich groß ist wie Q), über die nun ein zweiter, gestrichelt gezeichneter Stahldraht zur Rolle k des Planimeteranschlusses führt. Man sieht nun ein, daß die Differenz der Bewegung des ausgezogenen und des gestrichelt gezeichneten Drahtes die erwünschte Verschiebung von G darstellt. Um eine solche Bewegung zu erreichen, ist der mit Q verbundene Draht gekreuzt auf die Umlenkrollen aufgelegt und bewegt sich daher bei G entgegengesetzt zum anderen Draht. Jeder der Drähte umschlingt k — das in Führungsschienen parallel LC gleiten kann — je einmal an gegenüberliegenden Seiten (in Abb. 14 groß herausgezeichnet), so daß G tatsächlich genau

die der Änderung von s proportionalen Bewegungen mitmacht, ohne daß Fehler durch die Abweichung von der idealen Geometrie der Grundidee auftreten. Die frei wählbare Größe der Rolle ermöglicht es, eine befriedigende Lebensdauer der Stahlseile zu erzielen.

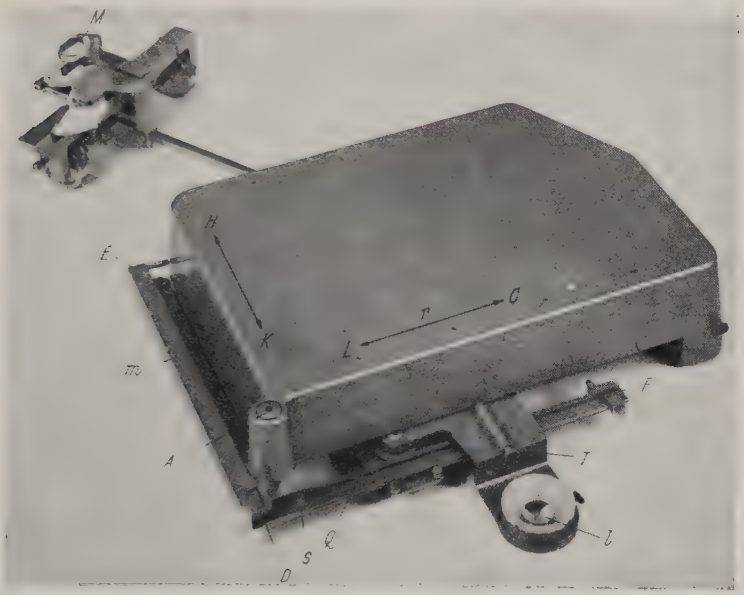

Abb. 16. Das neue mechanische Verschmierungsgerät mit angeschlossenem Planimeter

Wir haben nun die Bewegung in der Abszissenrichtung erläutert. Analog zum GEROLDschen Gerät erfolgt die Bewegung des ganzen Gerätes in der Ordinatenrichtung durch Abrollen auf dem Laufräderpaar RR', das in Abb. 15 zu sehen ist, welches ein Photo des Gerätes von unten zeigt. Im betriebsfertigen Zustand ist die Anordnung in Abb. 16 dargestellt. Die abzufahrende Kurve liegt unter dem Gerät und man hat zu erreichen, daß sich der Mittelpunkt des Nullkreises der Fahrlupe die Kurve entlang bewegt. Es ist nach dem Gesagten verständlich, daß das bei G angeschlossene Planimeter auf der Tischfläche die dem eingestellten m entsprechende „Schnittkurve" zeichnet.

Nachdem das Prinzip des Apparates klargestellt ist, sollen noch einige Bemerkungen zur technischen Ausführung gemacht werden.

Die Abwälzbewegung von q auf DF wird durch ein entlang DF unter Federzug gespanntes, die Rolle q umschlingendes Stahlseil praktisch schlupffrei gehalten. Alle Verschiebungen im Betrieb, wie die Bewegung von n auf DF, von B (also q, Q, n und N) und von G in Richtung LC erfolgen als Abrollen kugelgelagerter Rollen auf stählernen, im Fall

B und *G* gehärteten Laufschienen. Ebenso laufen alle Trommeln und Rollen auf Wälzlagern. Die Einstellung der Dreieckseite *r* erfolgt aus Stabilitätsgründen nicht bei *D*, sondern bei *A*. Die beweglichen Teile befinden sich im Innern eines nach unten offenen Gehäuses aus Leichtmetallguß, das auf einem auf gemeinsamer Welle festsitzenden Räderpaar *RR'* (Abb. 15) in der Ordinatenrichtung *HK* auf dem Arbeitstisch abrollt. Die Abszissen- und Ordinatenbewegung können unabhängig voneinander gebremst werden, so daß man zum genauen Fahren in der Richtung der Koordinaten kein Lineal benötigt.

Das vorliegende Gerät ist mit einer Visolett-Lupe als Fahrlupe ausgestattet, die an ihrer Unterseite eine Nullkreismarke in der Mitte einer Strichmarke (*l*, Abb. 16) trägt.

Das Bewegen eines Fahrstiftes oder einer Fahrlupe von Hand genau über der vorgesehenen Kurve bietet insofern gewisse Schwierigkeiten, als die bewegende Kraft nach verschiedenen Richtungen ungleiche Widerstände überwinden muß. Eine wesentliche Erleichterung wird nun dadurch erzielt, daß sich an den Seiten der Fahrlupe zwei kugelgelagerte Laufrollen *FF'* befinden (Abb. 15), auf denen sich die Fahrlupe in Richtung der Marke *l* in beliebigen Bahnen über die Zeichnung bewegen kann. Die ganze Anordnung ist, von Hand um die Achse von *l* drehbar, im Fahrlupenträger gelagert, so daß man beim Abfahren einer Kurve nur dafür zu sorgen hat, daß sich die Nullkreismarke über der Kurve bewegt und die Strichmarke eine Tangente an die Kurve bildet.

Der Teil *G* trägt eine Klaue, in der die Fahrlupe eines Ott-Roll-Feinplanimeters eingespannt wird (Abb. 15). Dieser Planimetertyp wurde wegen seiner den normalen Ausführungen überlegenen Präzision gewählt. Abb. 16 zeigt das Gerät mit angeschlossenem Planimeter von der Seite des Bedienenden aus. Da das Planimeter waagrecht wesentlich weiter vom Ablesenden entfernt ist als beim Arbeiten mit Planimeter ohne Entschmierungsgerät, macht ein aufgesetzter Doppelspiegel *M* die Planimeterablesung bequem möglich.

Wie beschrieben, rollt also das Gerät auf zwei Laufrädern und den Laufrollen *RR'* der Fahrlupe auf dem Arbeitstisch und die Fahrlupe des Planimeters soll möglichst dicht über die Tischfläche hinweggeführt werden, weil sonst bei der Planimeteranzeige ein Fehler entstehen kann. Die zu benützende, mindestens 85 × 105 cm große Tischfläche darf daher in ihrer Gesamtheit nicht mehr als etwa ± 0,5 mm von einer Ebene abweichen.

Da normale Tische und Reißbretter fast immer weitaus unebener sind, wurde für das Gerät ein Spezialtisch konstruiert (Abb. 17). Auf seine Platte *S*, die aus 8 mm starkem Spezialglas besteht, ist eine PVC-Folie aufgeklebt, deren Oberfläche einen für das Haften der Laufräder von Gerät und Planimeter günstigen Reibungswert aufweist. Die Tischplatte *S* ist über genau eben bearbeitete Hartholzleisten mit einem räumlichen Stahlfachwerk *R* verklebt, das auf vier (abnehmbaren) Füßen *T* ruht. Die Füße endigen in Stellschrauben *U* mit Gegenmuttern,

die mit Hilfe der zwei im Libellenträger V eingebauten Libellen das Horizontalstellen der Tischplatte ermöglichen. Unter den Schrauben U werden Fußplatten W am Boden befestigt, in denen das Ende einer Schraube U in einem Loch, das einer zweiten in einem Schlitz und das der restlichen zwei auf einer Ebene ruht. Diese Ausführung verhindert das unabsichtliche Verrücken des Tisches, aber auch ein Verspannen der Fußenden bei ungleicher Einstellung der Schrauben U.

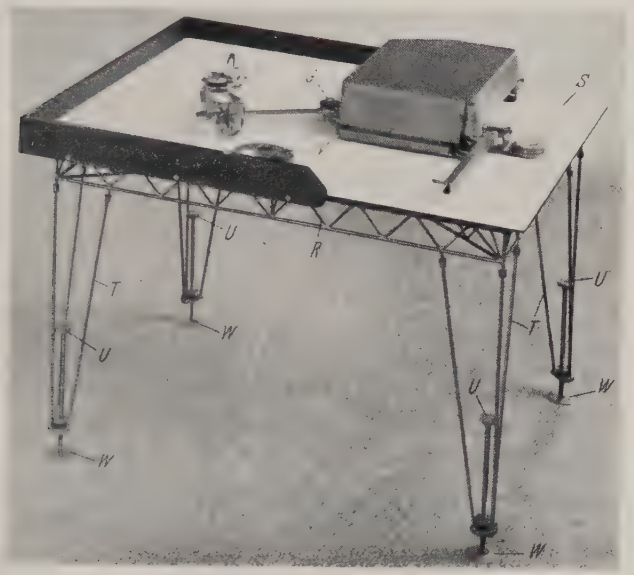

Abb. 17. Das neue mechanische Verschmierungsgerät auf Spezialtisch

Nun eine Bemerkung zur Normierung des Instrumentes: Die Planimeteranzeige ist in der vorliegenden Anordnung nicht nur von der Fahrstabeinstellung des Planimeters abhängig, sondern auch vom Verhältnis der Durchmesser der Rolle q und der Trommeln $Q = N$. Benötigt man also den Absolutwert der Planimeteranzeige, so stellt man m auf Null ein, denn dann wird $r = s$ und die Anzeige des Instrumentes ist dann einfach gleich der Fläche der vorgegebenen Kurve

$$\int_0^\infty F(s)ds.$$

Man braucht dann nur eine Fläche bekannter Größe, zweckmäßig ein Quadrat 10 × 10 cm, zu umfahren und erhält aus der entsprechenden Planimeterablesung den Umrechnungsfaktor.

Gegenüber dem rein graphischen Verfahren bedeutet die Arbeit mit dem beschriebenen Gerät eine Verringerung des Zeitaufwandes auf etwa ein Drittel. Um die Genauigkeit der Auswertung zu demonstrieren, werden in Abb. 18 die gefundenen Werte für eine verschmierte Gausssche Kurve — die wieder eine Gausssche Kurve ist — dem theoretischen Verlauf gegenübergestellt. Die Auswertung einer Anzahl von unabhängigen Verschmierungen ein und derselben Kurve hat einen mittleren Fehler der Relativwerte von 0,37%, der Absolutwerte von 0,48% ergeben. Durch Ausgleich der Streuungen der Einzelwerte wird in der Praxis der Fehler noch wesentlich weiter herabgedrückt, so daß diese Unsicherheit gegenüber den sonstigen experimentellen Fehlern wenig ins Gewicht fällt.

Abb. 18. Zur Prüfung des neuen Verschmierungsgerätes an einer Gaussschen Kurve. Die ausgezogene Linie ist die theoretisch zu erwartende, die eingezeichneten Kreise wurden mit dem Instrument erhalten

Die Apparatur ist seit Monaten in Verwendung und funktioniert klaglos.

VI. Maßnahmen zur Erzielung eines gleichmäßig belegten Primärstrahls

Am einfachsten ist nach dem bereits Dargelegten die Entschmierung dann, wenn der Primärstrahl in der Registrierebene gleichmäßig intensiv ist und als „unendlich lang" angesehen werden darf, das heißt wenn seine Länge mindestens $(2\,m^* + \sigma)$ beträgt (Abb. 4), wobei m^* die Breite des Bereiches merklicher Streuung bedeutet und σ die Länge der Strecke, entlang welcher die Registrierung vorgenommen wird. Außerhalb dieses Bereiches $(2\,m^* + \sigma)$ kann die Intensität in beliebiger Weise absinken.

Ist es nicht möglich, einen gleichmäßigen Bereich der oben angegebenen Länge zu erzielen, so hat man die Entschmierung mit endlicher Primärstrahllänge durchzuführen. Dieser Fall kann dann vorliegen, wenn sich der Streubereich weit über das normale Kleinwinkelgebiet hinaus erstreckt, wie z. B. bei Lösungen von Fadenmolekülen. (Auf die theoretischen Grundlagen dieses Gebietes [27] und die experimentelle

Erschließung [28] ist bereits verwiesen worden.) Dann ist aber zu fordern, daß die Intensität des Primärstrahls entweder an den beiden Enden der gleichmäßigen Zone sehr steil abfällt, das heißt, daß die Halblichtgebiete schmal sind oder aber, daß das Verhältnis der Länge eines Halblichtgebietes zur integralen Länge des Strahls in der Nähe von 0,4 liegt (vgl. Abschnitt II/7).

Die Realisierung dieser Forderungen mit Hilfe der käuflichen Strichfokusröhren erfolgt in verschiedener Weise, je nachdem wir die Kamera an der Schmalseite oder an der Breitseite des Fokus aufstellen. Wir besprechen die beiden Fälle getrennt.

a) Die Kamera steht an der Schmalseite des Fokus

Bei den meisten Röhrentypen hat dann die Brennfleck-Projektion eine Größe von etwa 1 × 1 mm. Es ist klar, daß in diesem Falle ein Primärstrahl erzielt werden kann, der einen sehr langen, gleichmäßig intensiven Teil besitzt.

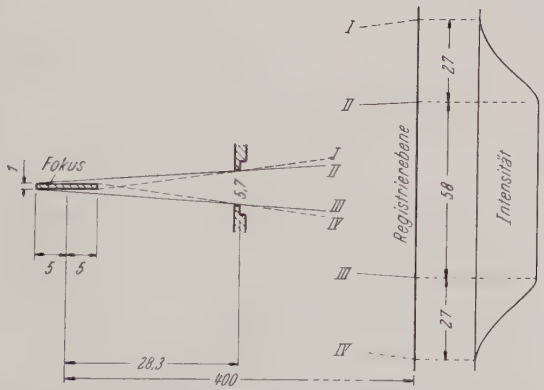

Abb. 19. Strahlengang beim Arbeiten an der Schmalseite des Fokus. Bei Verwendung der Philips-Röhre ergibt sich die dargestellte Begrenzung durch den Bau der Röhre selbst. (Der Mittelteil des Strahlenganges ist aus Platzgründen weggelassen)

Eine Begrenzung durch den Bau der Röhre selbst ist z. B. bei dem Philips-Röntgenrohr durch die Größe des Fensters gegeben (Abb. 19). Dort hat das an der Schmalseite liegende Fenster bei einem Zentralabstand von 28,3 mm einen Durchmesser von 5,7 mm, so daß bei einem Abstand Fokusmitte-Registrierebene von 400 mm, wie er etwa normalen Kameradimensionen entspricht, in der Registrierebene ein gleichmäßig belegter Bereich von 58 mm auftritt, an den sich beiderseits je ein Halblichtgebiet von 27 mm Länge anschließt. Sollte bei Problemen, die den Übergangsbereich zwischen Klein- und Weitwinkelstreuung betreffen, die Länge von 58 mm immer noch nicht als „unendlich" betrachtet werden können, das heißt den Wert $(2\,m^* + \sigma)$ nicht überschreiten, so ist man gezwungen, mit endlichem Primärstrahl zu ent-

schmieren. Dies kann auf verschiedene Weise geschehen. Will man mit photographischer Registrierung arbeiten und dafür einen steilen Abfall am Ende des gleichmäßigen Bereiches herstellen, so braucht man lediglich möglichst knapp vor dem Präparat — am besten vor der „Brücke“[5] — das Halblichtgebiet abzuschneiden, wie das Abb. 20 andeutet. Wir nehmen dabei an, daß sich das Präparat etwa in der Mitte zwischen Registrierebene und Fokus befindet (vgl. Abb. 1), die Blende daher etwas näher dem Fokus liegt.

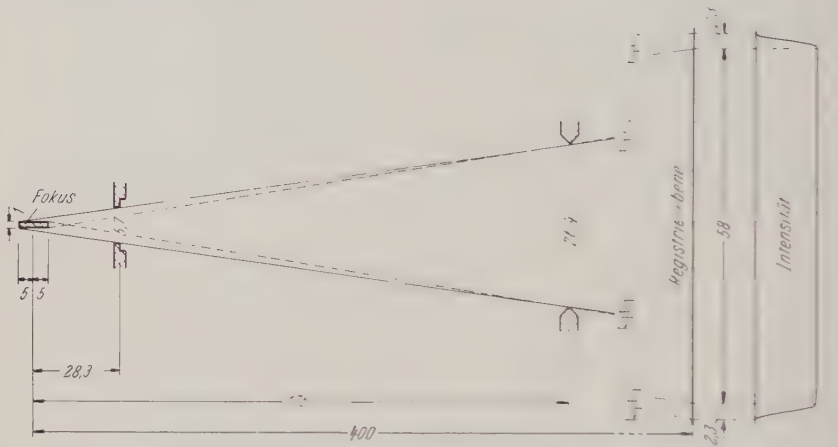

Abb. 20. Anordnung wie in Abb. 19, jedoch ist durch eine Blende in Präparatnähe das Halblichtgebiet weitgehend abgeschnitten

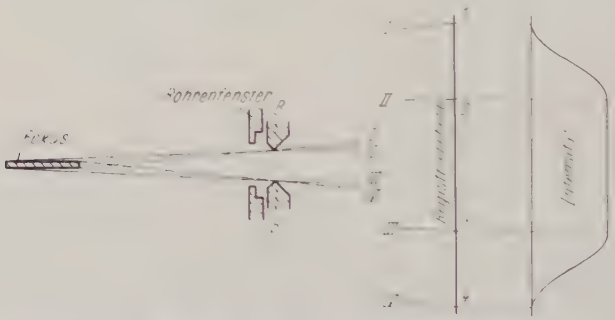

Abb. 21. Aufstellung an der Schmalseite des Fokus eines Philips-Rohrs. Durch geeignete Anbringung des Blendenpaares BB' erzielt man Vollicht- und Halblichtgebiete vorgegebener Länge

Bei der Impulszählung hat man vor allem zwei Möglichkeiten. Stellt man wieder den gleich steil abfallenden Primärstrahl her, so muß die Faltung mit dem Zählrohrspalt (vgl. II/7 a) auf das gewünschte

[5] Wir beziehen uns hier auf die von dem einen von uns angegebene und in unserem Arbeitskreis derzeit ausschließlich verwendete „blendenstreuungsfreie“ Anordnung. Vgl. [6].

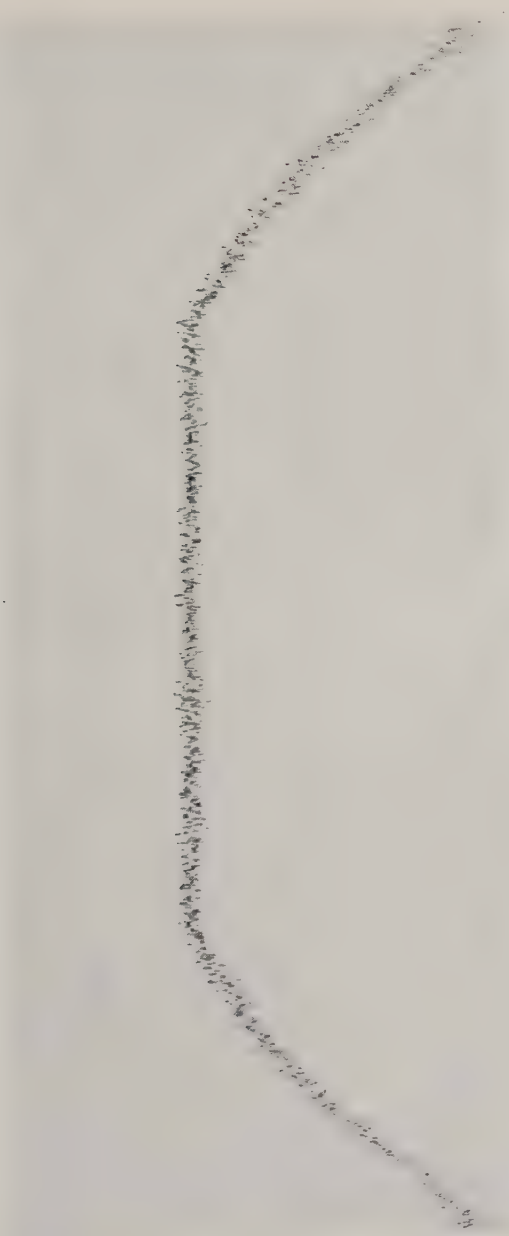

Abb. 22 *a*. Photometerkurve entlang einem mit Anordnung von Abb. 21 erhaltenen Primärstrahl

Verhältnis der Länge des abfallenden Teils und der integralen Länge des Primärstrahls in der Gegend von 0,4 führen, was einen etwa 22 mm langen Zählrohrspalt erfordert. Da die meisten Zählrohre diese Be-

dingung nicht erfüllen, wird man in der Regel den Weg wählen, daß man einen Primärstrahl mit einem genügend breiten Halblichtgebiet herstellt und den Zählrohrspalt wesentlich kürzer als dieses macht. Abb. 21 deutet an, wie ganz allgemein Lage und Öffnung der Blenden bestimmt ist, die ein Vollicht- und ein Halblichtgebiet vorgegebener Länge erzeugen sollen. Man braucht die Punkte 1, 2, 3, 4 nur in der gezeichneten Weise mit dem Fokus zu verbinden und erhält als Schnittpunkt der bei 1 und 2, bzw. 3 und 4 endigenden Linien die Lage des Blendenpaares BB'. Es muß allerdings vor dem Präparat zu liegen kommen, was im allgemeinen zutreffen wird. Außerdem muß natürlich die Bedingung erfüllt sein, daß die durch das Röhrenfenster gegebene Begrenzung außerhalb der Randstrahlen liegt. Abb. 22 *a* zeigt die Photometerkurve eines in dieser Weise erhaltenen Primärstrahls, Abb. 22 *b* die zugehörige Umzeichnung auf Intensität. Die abfallenden Enden wurden hier allerdings etwas schmäler gemacht, weil eine Zählrohrmessung mit einem Primärstrahl von 10 mm Länge beabsichtigt war.

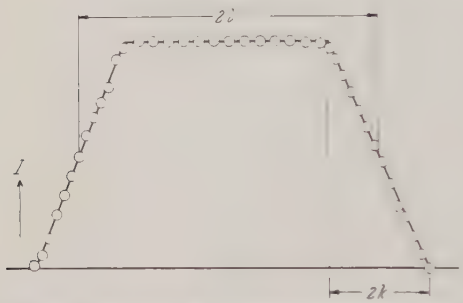

Abb. 22 *b*. Umzeichnung der Photometerkurve Abb. 22 *a* auf Intensität

In dem viel häufigeren Fall, daß eine so große gleichmäßige Länge den Betrag von $(2\,m^* + \sigma)$ bereits weit überschreitet, empfiehlt es sich, den Primärstrahl durch Anbringung von Blenden — entweder beim Eintrittsspalt in das Blendensystem oder vor der Brücke — entsprechend zu verkürzen, denn die Untergrundstreuung nimmt im allgemeinen mit der Länge des Primärstrahls zu, ohne daß beim Überschreiten von $(2\,m^* + \sigma)$ der eigentlich interessierende Streueffekt wächst[6].

[6] Wenn man in einer niedermolekularen Flüssigkeit gelöste Partikel kolloider Dimensionen untersucht, so hat man zu bedenken, daß sich der gesamte Kleinwinkelstreueffekt aus drei Teilen zusammensetzt.

a) Die Streuung des Lösungsmittels. Sie ist im Kleinwinkelgebiet in der Regel sehr schwach.

b) Die eigentliche Partikelstreuung, die aber nur insofern auftritt, als eine Elektronendichtendifferenz zwischen den Partikeln und dem Lösungsmittel besteht. Der Elektronenüberschuß, bzw. Unterschuß bedingt den Streueffekt, dessen Studium das eigentliche Ziel der Untersuchung ist und der in der Regel mit abnehmendem Winkel ansteigt.

c) Die Dichteschwankungen innerhalb der Partikel bewirken eine Art Flüssigkeitsstreuung, die im Kleinwinkelgebiet einen konstanten Untergrund verursacht. Die allgemeine Untergrundstreuung wird danach mit der das Präparat durchsetzenden Primärenergie zunehmen.

Es sei darauf hingewiesen, daß bei dieser Art der Aufnahme der ausgenützte Bereich der Fokusprojektion meist weit unter 1 mm² ist. Wie wir sehen werden, ist die Intensität dann viel geringer als bei der zweiten Aufstellungsmöglichkeit.

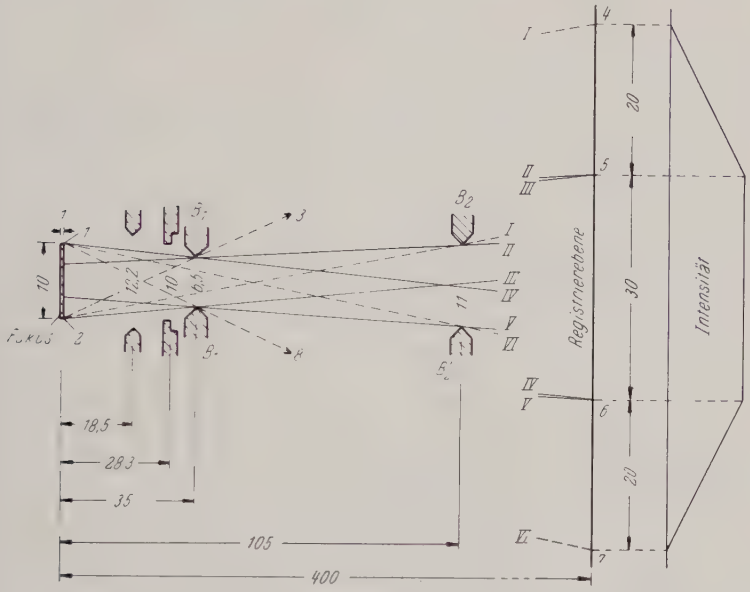

Abb. 23. Aufstellung an der Breitseite des Fokus eines Philips-Rohrs. Durch die beiden Blendenpaare B_1B_1' und B_2B_2' entsteht ein Vollicht und ein Halblichtgebiet vorgegebener Länge

b) Die Kamera steht an der Breitseite des Fokus

Er hat in dieser Sicht bei den üblichen Röhrentypen eine Projektion von 10 × 0,1 mm.

Die verschiedenen Fabrikate unterscheiden sich nun in der Art und Weise, wie die Strahllänge durch das Fenster oder den Ausschnitt eines den Fokus zylindrisch umgebenden Strahlenschutzmantels begrenzt wird. Die Philips-Röhren haben einen Mantel von 18,5 mm Radius, der einen Ausschnitt von etwa 12,2 mm Länge besitzt (Abb. 23). Dieser Ausschnitt engt jedoch den Strahl nicht ein, da das Röhrenfenster 28,3 mm vom Fokus entfernt und nur 10 mm lang ist. Beim Siemens-Rohr beginnt 8 mm vom Fokus entfernt ein 7,5 mm breiter Kanal, der bis zum Fenster führt, das seinerseits einen Abstand von 18 mm vom Fokus hat und einen Durchmesser von 6,5 mm aufweist. Nehmen wir einmal diese Fakten, die sich auf zwei weitverbreitete Röhrentypen beziehen, als gegeben an und studieren wir die Brauchbarkeit dieser Dimensionierungen für die Herstellung einer für Kleinwinkelaufnahmen geeigneten Primärstrahlform.

Es ist klar, daß bei der Philips-Röhre, wo Fokus und Röhrenfenster die gleiche Länge von etwa 10 mm aufweisen, bei jedem Abstand ohne

weiteres ein auf 10 mm gleichmäßig belegter Primärstrahl erzielt werden kann. Es kommt dann die ganze Fokusprojektion zur Wirkung, also eine Fläche von $10 \times 0{,}1 = 1\ \text{mm}^2$, die Intensität ist also erheblich höher als normalerweise beim Arbeiten an der Breitseite des Fokus. Wenn 10 mm bereits als „unendlich lang" betrachtet werden kann, bestehen somit optimale Arbeitsbedingungen. In vielen Fällen ist allerdings diese Fokuslänge zu gering.

Hält man nach anderen Möglichkeiten Ausschau, um bei diesem Röhrentyp an der Breitseite des Fokus einen wesentlich längeren gleichmäßig belegten Primärstrahl zu erzielen, dann bieten sich die folgenden Wege an.

Wir erkennen, daß die Herstellung eines steil abfallenden Primärstrahls von vornherein unmöglich ist; also werden wir zu einer gewünschten Länge des gleichmäßigen Teils des Primärstrahls gleichzeitig die Länge der abfallenden Enden vorgeben. In Abb. 23 sind z. B. die entsprechenden Längen mit 30 und 20 mm angenommen, was dem gewünschten Verhältnis von 0,4 zwischen der Breite des abfallenden Endes (20 mm) und der integralen Breite des ganzen Primärstrahls (50 mm) entspricht. Die Anordnung ist optimal wenn man photographisch arbeitet oder aber einen sehr kurzen Zählrohrspalt verwendet; bei großer Länge des Zählrohrspaltes ist die Betrachtung sinngemäß unter Beachtung von (18) zu modifizieren. Zur Festlegung der Blenden, die zum Zustandekommen dieses Strahls führen, haben wir dann zunächst die beiden gekreuzten Strahlen $1 - 6$ und $2 - 5$ zu zeichnen. Wenn wir nun an irgendeiner Stelle zwischen Fokus und Kreuzungspunkt ein Blendenpaar in der Art von B_1 und B_1' anbringen, dann ist tatsächlich von jedem Punkt der Strecke $5 - 6$ ein gleich großer Ausschnitt des Fokus zu sehen, das heißt diese Strecke ist gleichmäßig beleuchtet. Die Intensität ist aber um so größer, je näher das Blendenpaar B_1B_1' gegen den Fokus verschoben ist. Praktisch wird man also möglichst knapp vor dem Röhrenfenster diese Blende anbringen (im Falle der Philips-Röhre ist der kleinste realisierbare Abstand z. B. etwa 35 mm). Nun entspricht aber das durch dieses eine Blendenpaar abgegrenzte Halblichtgebiet im allgemeinen noch nicht den gestellten Forderungen. In unserem Beispiel sind seine Grenzen durch die punktierten Linien $1 - 8$ und $2 - 3$ gegeben. Um nun die Begrenzung auf den Bereich $4 - 7$ vorzunehmen, muß man sich zunächst klar machen, daß keine Blende in den durch die Randstrahlen $B_1 5$ und $B_1'6$ des Volllichtgebietes abgegrenzten Bereichs eintreten darf. Schneiden wir nun diese Randstrahlen mit den Grenzlinien des gewünschten Halblichtgebietes, nämlich den gekreuzten Linien $2 - 4$ und $1 - 7$, so erhalten wir unmittelbar die Stellen, wo ein zweites Blendenpaar mit B_2B_2' eingesetzt werden muß. Diese Lösung ist allerdings nur eine von vielen möglichen. Wir erkennen, daß eine Entfernung des Blendenpaares B_1B_1' vom Fokus eine entgegengesetzte Bewegung des Blendenpaares B_2B_2' nach sich zieht (Abb. 24) und schließlich die beiden Blendenpaare bei der in Abb. 25 dargestellten Anordnung zusammenfallen. Es

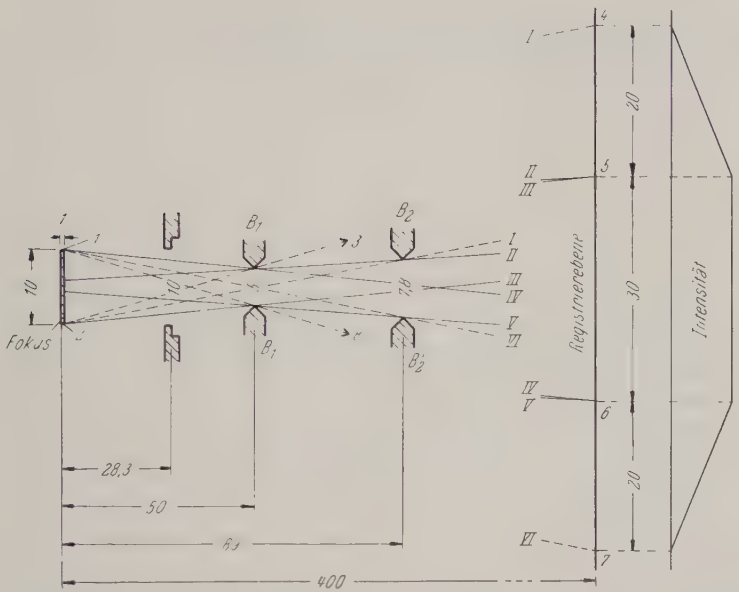

Abb. 24. Gleiche Intensitätsverteilung im Primärstrahl wie bei Abb. 23. Das Blendenpaar B_1B_1' ist aber vom Fokus weiter weggeschoben, was eine gleichzeitige Verschiebung von B_2B_2' in der entgegengesetzten Richtung notwendig macht

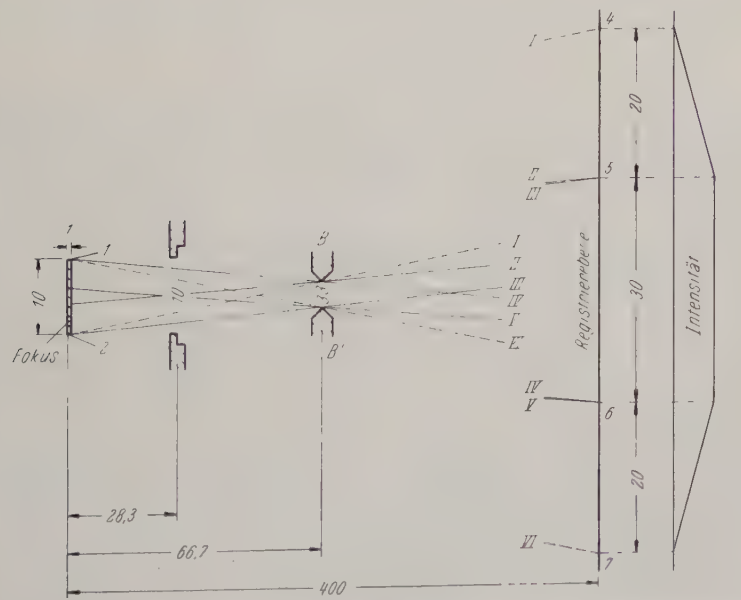

Abb. 25. Gleiche Intensitätsverteilung im Primärstrahl wie bei Abb. 23 und 24. Die beiden Blendenpaare fallen zusammen

besteht aber wie gesagt aus Intensitätsgründen Interesse, das Blendenpaar B_1B_1' möglichst nahe an den Fokus zu bringen, was bei der Philips-Röhre der Anordnung in Abb. 23 entspricht.

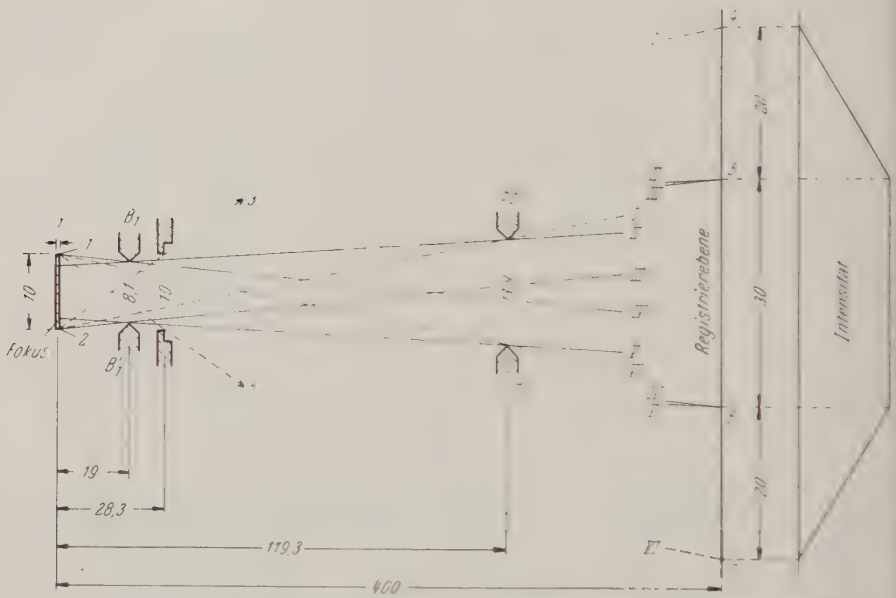

Abb. 26. Gleiche Intensitätsverteilung im Primärstrahl wie bei Abb. 23 bis 25. Das Blendenpaar B_1B_1' ist nahe an den Fokus (in das Rohr) gelegt

Wir wollen nun betrachten, welche Anordnungen sich ergeben, wenn bei festgesetzter Vollicht- und Halblichtlänge die Blenden B_1B_1' näher an den Fokus gerückt werden ohne Rücksicht auf die Hinderung durch die Dimensionen der Röhre. Erwartungsgemäß rückt das Blendenpaar B_2B_2' dann vom Fokus weg und die Randstrahlen bewegen sich nach außen (Abb. 26). Im Grenzfall, wo B_1B_1' an den Enden des Fokus selbst angelangt ist und daher seine Anbringung gegenstandslos wird (Abb. 27), ist eine volle Analogie zu Abb. 21 entstanden. Wir erkennen aber, daß die Realisierung dieses Falles ein Röhrenfenster erfordert, das breiter ist als der Fokus[7], was bei den handelsüblichen Röhren im allgemeinen nicht gegeben ist. Immerhin eröffnet diese Betrachtung den folgenden Weg.

Wenn man innerhalb der Röhre, also sehr nahe am Fokus, eine Einengung des Strahls vornimmt, wie das etwa bei der Siemens-Röhre schon der Fall ist, bzw. sich bei der Philips-Röhre durch Verengung des Fensters im Strahlenschutzmantel leicht erreichen ließe, so ist dadurch eine bestimmte Länge des gleichmäßigen Primärstrahls vorgegeben und es ist diese mit größerer Intensität realisiert als bei einer Einengung

[7] Bei der Philips-Röhre müßte es z. B. eine Breite von 11,5 mm besitzen.

außerhalb des Fensters. Man kann durch eine solche Maßnahme aber nur eine *bestimmte* Primärstrahllänge herstellen und hat z. B. nicht mehr die Möglichkeit, einen wesentlich kürzeren aber dafür intensiveren

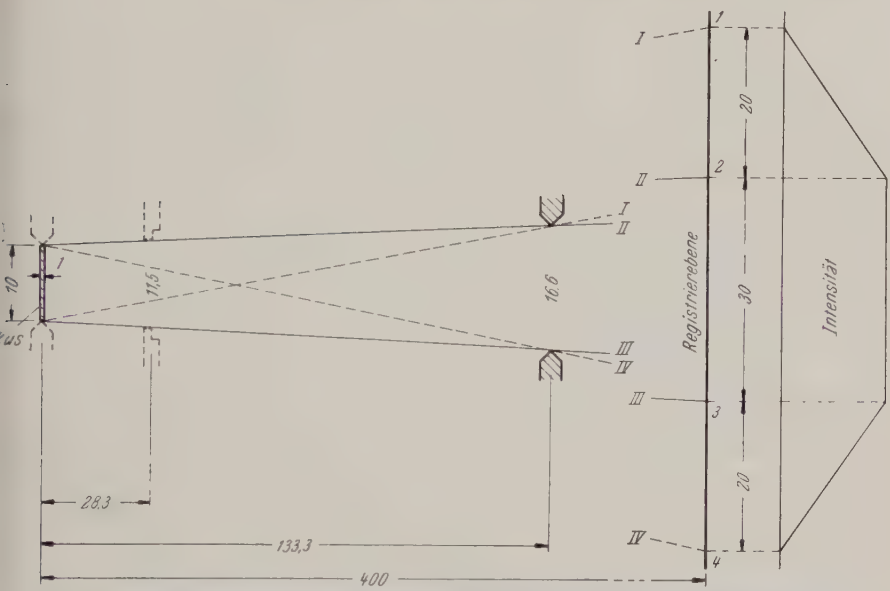

Abb. 27. Gleiche Intensitätsverteilung im Primärstrahl wie bei Abb. 23 bis 26. Das Blendenpaar ist bis zum Fokus verschoben gedacht, womit es wegfällt. Es entsteht ein sich „öffnender" Strahl, analog wie in Abb. 21

Primärstrahl durch Anbringung von Blenden außerhalb der Röhre zu realisieren. Bei der Röhre von Siemens und Halske, wo eine solche Einengung im Innern vorhanden ist, ergibt sich der längste Primärstrahl mit zugehörigem Halblichtgebiet gemäß Abb. 28.

Wir möchten nach dem Gesagten die Festlegung auf eine bestimmte Primärstrahldimension letzten Endes nicht als ganz befriedigende Lösung ansehen, so daß im Augenblick nur die Anbringung zweier Blenden außerhalb der Röhre bleibt, wie dies an Hand der Abb. 23 und 24 dargelegt wurde.

Natürlich gäbe es eine Änderung im Bau der üblichen Röhren, die größte Vorteile bringen würde und keine beträchtlichen Neuentwicklungen erforderte: die Kürzung des Fokus wesentlich unter den Fensterdurchmesser. Man könnte dann mit dem sich öffnenden Strahl nach dem Einblendenschema der Abb. 27 arbeiten und würde die Vorteile großer Intensität mit Einfachheit der Strahlenführung verbinden. Ein weiterer Vorteil wäre die hohe Gleichmäßigkeit des Fokus. Bei den Anordnungen mit den gekreuzten Strahlen in Abb. 23, 24 und 25 werden die Punkte des Vollichtgebietes im Primärstrahl nicht vom gleichen Bereich des Fokus belichtet, wenn auch eine von der Größe und Lage des

Blendenpaares $B_1 B_1'$ abhängige Überschneidung der Bereiche besteht. Bei dem Schema der sich öffnenden Strahlen dagegen fällt auf alle Punkte des gleichmäßig sein sollenden Primärstrahlteils Licht vom gesamten Fokus.

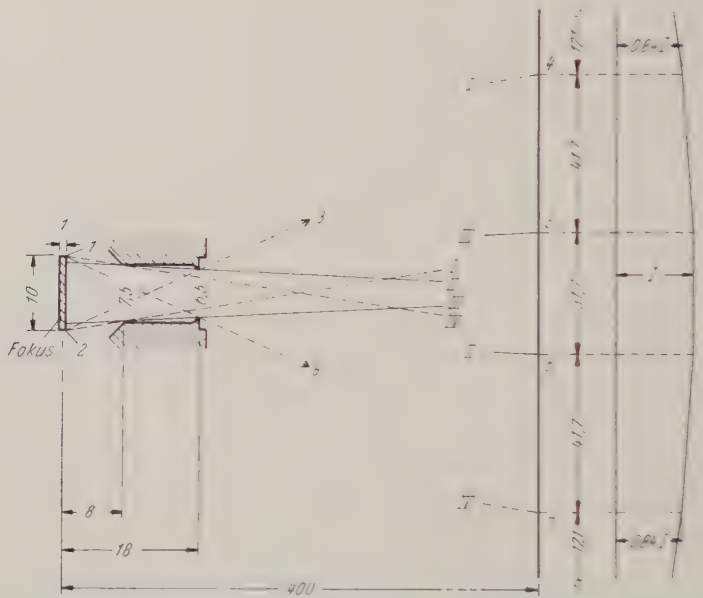

Abb. 28. Aufstellung an der Breitseite des Fokus eines Siemens-Halske-Rohres. Durch dessen Bau ergibt sich der gezeichnete längstmögliche Primärstrahl

Bei einer Fokuslänge von 7 mm würde sich z. B. mit den übrigen Dimensionen der Philips-Röhre eine maximale Länge des Vollichtgebietes im Primärstrahl von 49,5 mm erzielen lassen.

Wünschenswert wäre natürlich, daß mit der Verkürzung des Fokus eine Zunahme seiner Breite in solchem Ausmaß verbunden ist, daß die Brennfleckfläche der Röhre etwa unverändert bleibt.

Zusammenfassung

1. Der Umstand, daß Röntgenkleinwinkelaufnahmen aus Intensitätsgründen mit einem Strahlenbündel von strichförmigem Querschnitt hergestellt werden, führt dazu, daß die experimentellen Streukurven im Vergleich mit den für einen Strahl punktförmigen Querschnittes berechneten einen erheblichen Kollimationseinfluß aufweisen. Er wird als Verschmierung bezeichnet, seine Eliminierung, die den eigentlichen Inhalt dieser Arbeit darstellt, als Entschmierung.

2. Es wird gezeigt, daß die Divergenz des Primärstrahlbündels im allgemeinen keine Komplikation der Auswertung darstellt und so gerechnet werden kann, als ob das Bündel aus parallelen Strahlen bestünde.

3. Die grundsätzlichen Möglichkeiten einer Anwendung der FOURIER-Analyse zur Entschmierung, deren Diskussion auf KRANJC zurückgeht, werden kurz besprochen.

4. Die Untersuchungen von YUDOWITCH, optimale Bedingungen für eine Vernachlässigbarkeit des Verschmierungseffektes experimentell vorzugeben, werden diskutiert. Im Sinne dieser Grundidee wird eine einfache Regel abgeleitet, aus der hervorgeht, welches Längen-Breitenverhältnis des Primärstrahls jeweils zu wählen ist. Es ist nicht für die ganze Streukurve optimal wählbar, sondern immer nur für einen engeren Streuwinkelbereich (z. B. für das besonders interessierende Gebiet eines Nebenmaximums).

5. Der Einfluß der Primärstrahllänge auf die Streukurve wird streng behandelt und es werden Normierungen im Hinblick auf die Verwertung der Absolutintensität festgesetzt.

6. Es werden die Möglichkeiten diskutiert, die spaltverschmierte Kurve direkt zu verwenden, insbesonders im Hinblick auf die Bestimmung der Invariante.

7. Das Verfahren, aus der Streukurve Teilkurven abzuspalten, die analytisch entschmiert werden können, wird diskutiert. Die eigentliche Entschmierung hat sich dann nur auf den verbleibenden Rest zu erstrecken, wodurch insgesamt eine erhebliche Steigerung der Genauigkeit erzielt werden kann.

8. Das exakte Entschmierungsverfahren für unendlich langen Primärstrahl nach GUINIER und FOURNET wird besprochen. Es setzt sich aus den drei Operationen der Differenzierung, der Division durch den Streuwinkel und der *Ver*schmierung der erhaltenen Hilfskurve zusammen.

9. Für die Durchführung der Differentiation wird ein in unserem Arbeitskreis entwickeltes Gerät beschrieben, bei welchem die Neigung durch Anlegen von Schmiegungskreisen ermittelt wird.

10. Es wird gezeigt, daß die Verschmierung durch den Gebrauch einer ein für allemal zu zeichnenden Hyperbelschar sehr erleichtert werden kann.

11. Die von uns in einer früheren Untersuchung gegebene Erweiterung des GUINIER-FOURNETschen Verfahrens auf Primärstrahlen jeder Länge wird dargestellt. Es unterstellt eine kastenförmige Intensitätsverteilung in Richtung der Primärstrahllänge.

12. GEROLD hat eine Modifikation unseres Verfahrens gegeben, mit dessen Hilfe die Entschmierung auch für eine trapezförmige Intensitätsverteilung in Richtung der Primärstrahllänge durchgeführt werden kann, wenn zwischen der Breite der abfallenden Primärstrahlenden und der integralen Breite das Zahlenverhältnis 0,36 besteht. Eine Nacharbeitung in unserem Arbeitskreis hat ergeben, daß das Zahlenverhältnis 0,40 etwas bessere Resultate ergibt, wenngleich das Verfahren auf diese Proportion nicht sehr empfindlich reagiert.

13. Während GEROLD zunächst daran gedacht hatte, daß die trapezförmige Intensitätsverteilung durch Faltung einer kastenförmigen

wirklich vorhandenen mit dem Zählrohrspalt zustande kommt, wird hier auch der Fall besprochen, daß bereits eine merklich trapezförmige Intensitätsverteilung vorliegt (was tatsächlich meist zutrifft) und nun zusätzlich eine Faltung mit dem Zählrohrspalt zustande kommt. Es wird eine einfache Regel für das Zusammenwirken des primär gegebenen Trapezes mit dem Zählrohr vorgeschlagen.

14. Es wird auf die Möglichkeit hingewiesen, die Entschmierung mittels einer vollautomatischen elektronischen Rechenmaschine durchzuführen. Die Programmierung hat keinerlei Schwierigkeiten verursacht.

15. Aus Intensitätsgründen wird man bestrebt sein, den Primärstrahl möglichst breit zu machen. Zur Eliminierung des dadurch bewirkten Kollimationseinflusses wird ein neues Verfahren angegeben. Es beruht darauf, daß die Streukurve in der Umgebung eines Meßpunktes durch eine Taylor-Reihe dargestellt werden kann, aus der das Korrekturglied entnommen wird. Man erhält eine praktisch völlig ausreichende Näherung, wenn man mit dem quadratischenTerm abbricht.

16. Knapp hat ein Verfahren vorgeschlagen, wonach die Aufnahme nicht wie üblich an der Breitseite, sondern an der Schmalseite des Primärstrahls gemacht werden soll. Man hat also im Extremfall unendlich kleine Länge, jedoch unendlich große Breite. Er kann zeigen, daß die Entschmierung in diesem Fall besonders einfach ist, unter der Voraussetzung einer gleichmäßigen Intensitätsverteilung in der Primärstrahllänge. Diese erreicht er unter Verwendung des von dem einen von uns angegebenen Blendensystems. Die Vor- und Nachteile des Vorschlages werden diskutiert. Ein abschließendes Urteil ist noch nicht möglich.

17. Bezogen sich die bisherigen Ausführungen auf unorientierte Präparate, so werden auch die Probleme kurz diskutiert, die sich bei orientierten Präparaten ergeben. Der Grenzfall vollständiger Orientierung führt zum Verschwinden von Verschmierungseffekten. Es kann gezeigt werden, daß ganz erhebliche Abweichungen von der idealen Orientierung immer noch die Auswertung unter Annahme vollständiger Orientierung zulassen. Wesentlich unangenehmer ist die Situation bei einer nicht vollständigen *Des*orientierung. Hier sind die Fehler, die man bei Annahme völliger Unordnung macht, wesentlich größer.

18. Gerold hat ein Gerät zur mechanischen Durchführung der Verschmierung entwickelt. Es wird eine Beschreibung und Diskussion der Grenzen seiner Genauigkeit gegeben.

19. Wir haben, fußend auf dem Geroldschen Prinzip, die Neukonstruktion eines Gerätes vorgenommen, bei der durch die Ausschaltung wesentlicher Fehlerquellen eine Genauigkeitssteigerung erzielt wurde. An Stelle der direkten Abwälzbewegung durch einen endlichen Schnurzug wird die Abwälzbewegung einer Rolle auf einer Schiene durch einen endlosen Stahldrahtzug auf den Planimeterarm übertragen. Die Bewegungen der Schiene relativ zum Gerät lassen sich durch einen zweiten endlosen Stahldrahtzug kompensieren.

20. Nach dem unter Punkt 11 bis 13 Dargelegten ist dafür Sorge zu tragen, daß der Primärstrahl in der Registrierebene eine kastenförmige oder bestimmte trapezförmige Intensitätsverteilung in seiner Längsrichtung aufweist. Es wird ausführlich dargelegt, welche Blenden zur Längseingrenzung anzubringen sind, um eine gewünschte Form zu erzielen. Die Maßnahmen sind verschieden, je nachdem ob man an der Breitseite oder an der Schmalseite des Strichfokus arbeitet, und sie hängen vom Röntgen-Röhrentypus ab. Es ergibt sich, daß eine Röhre mit einem um einige Millimeter kürzeren Fokus sehr erhebliche Vorteile bringen würde.

Dem International Wool Secretariat (London), das uns die Mittel für den Bau des neuen Entschmierungsgerätes zur Verfügung gestellt hat, möchten wir unseren verbindlichsten Dank sagen. Die ganze Studie entstand im Rahmen der von der Rockefeller Foundation subventionierten Arbeiten und es sei dieser Institution für die großzügige Förderung auch an dieser Stelle bestens gedankt.

Literatur

1. A. Guinier und G. Fournet, Small angle scattering of X-rays. New York: Verl. J. Wiley & Sons, Inc. und London: Chapman u. Hall Ltd. 1955.
2. W. W. Beeman, P. Kaesberg, J. W. Anderegg und M. B. Webb, Size of Particles and Lattice Defects, in: Handbuch der Physik, Band XXXII, herausgegeben von S. Flügge. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957.
3. O. Kratky, Z. Elektrochem. Ber. Bunsenges. physik. Chem **60**, 245 (1956); Naturwissenschaften **42**, 237 (1955).
4. V. Gerold, Z. angew. Physik **9**, 43 (1957).
5. O. Kratky, Mh. Chem **76**, 325 (1947).
6. O. Kratky, Z. Elektrochem. Ber. Bunsenges. physik. Chem. **58**, 49 (1954); Kolloid-Z. **144**, 110 (1955); O. Kratky und A. Sekora, Mh. Chem. **85**, 660 (1954); O. Kratky, Z. Elektrochem. Ber. Bunsenges. physik. Chem. **62**, 66 (1958); O. Kratky und Z. Skala, Z. Elektrochem. Ber. Bunsenges. physik. Chem. **62**, 73 (1958).
7. T. Johansson, Z. Physik **82**, 587 (1953); A. Guinier, C. r. acad. Sci. [Paris] **223**, 31 (1946).
8. R. Spencer, Phys. Rev. **38**, 618 (1931).
9. K. Kranjc, Acta crystallogr. **7**, 709 (1954).
10. K. L. Yudowitch, J. applied Physics **20**, 1232 (1949).
11. R. Hosemann, Z. Physik **113**, 751 (1939); **114**, 133 (1939).
12. O. Kratky, L. Kahovec und H. Werner, Z. Elektrochem. Ber. Bunsenges. physik. Chem. **63**, 64 (1959).
13. O. Kratky, G. Porod und L. Kahovec, Z. Elektrochem. angew. physik. Chem. **55**, 53 (1951).
14. G. Porod, Kolloid-Z. **124**, 83 (1951); **125**, 51 (1951).
15. Vgl. z. B. O. Kratky, Trans. Far. Soc. **52**, 558 (1956); Mh. Chem. **87**, 269 (1956).
16. L. Kahovec, G. Porod und H. Ruck, Kolloid-Z. **133**, 16 (1953).
17. O. Kratky, A. Sekora und I. Pilz, Z. Naturforschg. **9** b, 803 (1954).
18. P. W. Schmidt, Acta crystallogr. **8**, 772 (1955).

19. Vgl. zur Verwendung des Querschnittsfaktors z. B. O. Kratky, G. Porod, A. Sekora und B. Paletta, J. Polymer Sci **16**, 163 (1955) und zur Verwendung des Dickenfaktors z. B. H. Janeschitz-Kriegl, O. Kratky und G. Porod, Z. Elektrochem. Ber. Bunsenges. physik. Chem. **56**, 146 (1952); O. Kratky, Trans. Far. Soc. **52**, 558 (1956).
20. V. Luzzatti, Acta crystallogr. **11**, 843 (1958).
21. A. Guinier, Ann. physique **12**, 161 (1939).
22. C. G. Shull und L. R. Roess, J. applied Physics **18**, 295 (1947).
23. J. W. Anderegg, W. W. Beeman, S. Shulman und P. Kaesberg, J. Amer. Chem. Soc. **77**, 2927 (1955).
24. O. Kratky und G. Porod, Acta Physica Austriaca **2**, 133 (1948).
25. A. Guinier und G. Fournet, J. phys. rad. **8**, 345 (1947); J. M. W. du Mond, Physic. Rev. **72**, 83 (1947).
26. O. Kratky und Z. Skala, Z. f. Instrumentenkunde **67**, 186 (1959)..
27. Zur Theorie vgl.: G. Porod, Z. Naturforschg. **4** a, 401 (1949); J. Polymer Sci. **10**, 157 (1953); O. Kratky und G. Porod, Rec. Trav. chim. Pays-bas **68**, 1106 (1949).
28. Zum Experiment: O. Kratky und H. Sembach, Makrom. Chem. **16**, 115 (1955); O. Kratky und R. Breiner, Makrom. Chem. **25**, 134 (1958).
29. V. Gerold, Acta Crystallogr. **10**, 287 (1957).
30. G. Porod und Ch. v. Sacken, Publikation in Vorbereitung.
31. H. Knapp, Kolloid-Z. **142**, 163 (1955); Z. angew. Physik **9**, 233 (1957).
32. O. Kratky und G. Porod, Z. Elektrochem. **58**, 918 (1954); **60**, 188, 190 (1956).
33. P. H. Hermans und A. Weidinger, Z. Elektrochem. **58**, 923 (1954).

On Problems Associated with Two-dimensional Fields in Homogeneous Anisotropic Media

By

G. Power, University of Nottingham, England

and

H. L. W. Jackson, Nottingham Technical College, England

(*Received June 26, 1959*)

Summary

Solutions are given in terms of complex potential functions which enable the perturbation effects of a homogeneous anisotropic dielectric cylinder set in a general two-dimensional electric field to be written down. Formulae are developed for the mechanical action on the portion of anisotropic material inside a given boundary where an electric (or magnetic) field is present. The results are extended to determine the action on a surface of discontinuity between two homogeneous media, and applications are given when one medium is anisotropic and the other isotropic.

§ 1. Determination of Fields

The circle theorem is widely used in many branches of mathematical physics to facilitate the solution of two-dimensional problems which previously had to be treated by ad hoc methods. Unfortunately the application of this theorem in electrical theory is confined to dielectrics which are homogeneous and isotropic. It is therefore of importance to attempt to formulate a general result of this type when an anisotropic dielectric is placed in a given two-dimensional electric field.

Consider such an uncharged anisotropic dielectric cylinder of circular cross-section and let it be set in an uncharged infinite homogeneous isotropic dielectric of constant k_0. There are no other finite boundaries. Define rectangular axes Ox, Oy which coincide with the electrical axes of the anisotropic medium. This means that inside the boundary of the cylinder given by $|z| = 1$, $z = x + i\,y$, the field is derivable from an electric potential ϕ_i which satisfies the differential equation

$$k_1 \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} = 0, \qquad (k_1, k_2 \text{ constant}), \tag{1}$$

and outside the boundary the electric potential ϕ_0 satisfies Laplace's equation

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} = 0. \tag{2}$$

The boundary conditions that have to be satisfied are

$$\left.\begin{aligned} \phi_0 &= \phi_i \\ l\,k_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial x} + m\,k_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial y} &= l\,k_1 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + m\,k_2 \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \end{aligned}\right\}, \quad \text{when} \quad |z| = 1, \tag{3}$$

l, m being the direction-cosines of the normal to the circular boundary.

Equations (1), (2) show that ϕ_0 is harmonic, and ϕ_i is of the form $\mathrm{Re}\,(p\,z + q\,\bar{z})$ with the usual notation for real part, where $p - q = 1/\sqrt{k_1}$, $p - q = 1/\sqrt{k_2}$. Since ϕ_i is a harmonic function of $x/\sqrt{k_1}$, $y/\sqrt{k_2}$ it can be seen that the second of the boundary conditions (3) becomes

$$\sqrt{(k_1\,k_2)}\,\frac{\partial \psi_i}{\partial s} = k_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial s},$$

where ψ is the current function corresponding to ϕ, and δs represents arc length of boundary. In terms of complex potential functions the boundary conditions are thus

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(w_0) &= \mathrm{Re}\,(w_i) \\ \text{and} \qquad & \\ k_0\,\mathrm{Im}\,(w_0) &= \sqrt{(k_1\,k_2)}\,\mathrm{Im}\,(w_i) \end{aligned}\right\} \quad \text{when} \quad |z| = 1. \tag{4}$$

Let us assume that the anisotropic cylinder has been set in a known field, so that we may take

$$\left.\begin{aligned} w_0 &= \sum \beta_n \left(p\,z + \frac{q}{z}\right)^n + \sum \gamma_n \left(\frac{p}{z} + q\,z\right)^n \\ w_i &= \sum \alpha_n\,(p\,z + q\,\bar{z})^n. \end{aligned}\right\}.$$

The boundary conditions (4) now show that

$$\left.\begin{aligned} \beta_n + \bar{\gamma}_n &= \alpha_n \\ \text{and} \qquad & \\ k_0\,(\beta_n - \bar{\gamma}_n) &= \sqrt{(k_1\,k_2)}\,\alpha_n \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

A further relation between β_n, γ_n is obtained by considering the known behaviour of ϕ_0 at singular points or possibly at infinity. The problem is thus theoretically soluble, and although no general formula is given here, any particular problem can be treated quite simply. Logarithmic terms can also be incorporated.

The problem of fields caused entirely by singularities inside $|z| = 1$ can be considered in a similar manner. Results can also be obtained by this method if the region outside $|z| = 1$ is anisotropic, but the formulae will be rather complicated.

It must be realized that a circular boundary is not the natural one when considering anisotropic material of this kind, and hence the solution appears a little untidy. The natural boundary is the ellipse $x^2/k_1 + y^2/k_2 = 1$ and for this POWER [1] has developed a general theorem.

All the results given can be extended to include boundaries of other shapes by the judicious use of conformal transformations.

We have discussed the case where both inside and outside the boundary the potentials satisfy LAPLACE-type differential equations. If the differential equations are of the POISSON-type, as would be the case if there was a volume charge distribution, then one could proceed as indicated by POWER and JACKSON [2].

§ 2. Applications

(a) *Circular cylinder in a uniform field*

Let the circular cylinder of anisotropic dielectric with no volume distribution of charge be placed in the uniform electric field whose undisturbed complex potential is Ez where E may be complex. We may take

$$\phi_i = \mathrm{Re}\,\alpha_1 (p\,z + q\,\bar{z}),$$
$$\phi_0 = \mathrm{Re}\left\{\beta_1 \left(p\,z + \frac{q}{z}\right) + \gamma_1 \left(\frac{p}{z} + q\,z\right)\right\}.$$

Equations (5) immediately show that

$$\beta_1 + \bar{\gamma}_1 = \alpha_1,$$
$$k_0 (\beta_1 - \bar{\gamma}_1) = \sqrt{(k_1 k_2)}\,\alpha_1,$$

together with the condition that the field is uniform at infinity, hence

$$p\,\beta_1 + q\,\gamma_1 = E.$$

These lead at once to

$$\alpha_1 = \frac{2 k_0 \beta_1}{k_0 + \sqrt{(k_1 k_2)}} = \frac{2 k_0 \{p\,[k_0 + \sqrt{(k_1 k_2)}]\,E - q\,[k_0 - \sqrt{(k_1 k_2)}]\,\bar{E}\}}{\{p^2\,[k_0 + \sqrt{(k_1 k_2)}]^2 - q^2\,[k_0 - \sqrt{(k_1 k_2)}]^2\}}$$
$$= \frac{2 k_0 \bar{\gamma}_1}{k_0 - \sqrt{(k_1 k_2)}},$$

and the fields are completely determined.

This result shows, amongst other things, that the lines of force in the anisotropic medium are straight, making an angle

$$\tan^{-1}\left\{\left(\frac{k_0 + k_1}{k_0 + k_2}\right)\tan\theta\right\}$$

with the x-axis, θ being the inclination of the original field.

(b) External line charge

Consider a line charge of strength m in air at the point $z = \alpha$ outside the circular anisotropic cylinder. The complex potential of the field external to the cylinder may be taken as

$$w_0 = m \log \left(p\, z + \frac{q}{z} - \alpha_1 \right) + M \log \left(q\, z + \frac{p}{z} - \alpha_2 \right)$$

and the field inside the cylinder as

$$w_i = N \log (p\, z + q\, \bar{z} - \beta).$$

If we set $z = \alpha + \zeta$ in w_0 then $(w_0 - m \log \zeta) \to$ const. as $\zeta \to 0$. This means $p\, \alpha + q/\alpha = \alpha_1$.

The first of the boundary conditions (4) yields

$$\alpha_1 = \beta = \bar{\alpha}_2, \qquad N = m - M$$

and the second gives

$$\sqrt{(k_1\, k_2)}\, N = k_0\, (m - M).$$

We thus see that

$$N = \frac{2\, m}{(1 + \gamma)}, \qquad M = \frac{m\, (1 - \gamma)}{(1 + \gamma)} \qquad \text{where} \qquad \gamma = \frac{\sqrt{(k_1\, k_2)}}{k_0},$$

and the fields are completely determined.

§ 3. Mechanical Forces

When dielectric material is in the presence of an electric field, internal stresses are set up, and although these stresses are not directly observable, the total mechanical force on any portion of the material can be measured physically. The problem of determining mathematically the mechanical force on the part of an ordinary electrical system inside any surface drawn in the field has been studied by many authors, the conclusion being that for dielectric media, however anisotropic, this mechanical force can be represented in the main by a system of interfacial tractions over the surface. Provided that the media are homogeneous and that a linear relationship exists between the components of electric displacement $\boldsymbol{D}$ and field $\boldsymbol{E}$, Livens [3] deduces certain possible surface tractions, themselves being representative of a stress system which, for two dimensional fields, can be specified at any point in terms of the components of $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$ by

$$\left.\begin{aligned} P_{xx} &= \frac{1}{2}\, (E_x D_x - E_y D_y), \\ P_{yy} &= \frac{1}{2}\, (-E_x D_x + E_y D_y) \\ P_{xy} &= E_x D_y, \qquad P_{yx} = E_y D_x. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

The question of uniqueness does not occur provided overall forces only are considered. In the general case of a crystalline medium $D_x : D_y \neq E_x : E_y$, so that the stress system is not self-conjugate, and

therefore does not represent a stress system of the normal mechanical type. There is a bodily torque of amount $E_x D_y - E_y D_x$ per unit volume, and it is easily shown to be precisely the torque obtained from the ideas involved in the theory of medium polarization. The stress specification (6) therefore includes everything, and will be employed to obtain, in the two-dimensional case, expressions for the mechanical force and couple on the portion of a homogeneous anisotropic medium inside a given closed contour in terms of contour integrals involving known functions. The results are extended to determine the mechanical action on the surface of discontinuity between two homogeneous media, and examples are given when one medium is anisotropic and the other is isotropic.

As before, take the axes of x and y in the plane of flow to coincide with the electrical axes of the homogeneous anisotropic medium. The field is derivable from an electric potential ϕ which, if there is no volume distribution of charge, satisfies the differential equation (1).

The mechanical force on the dielectric medium contained inside a given closed contour C can be derived from the tractions representative of the stress system (6) with $D_x = (k_1 E_x)/4\pi$, $D_y = (k_2 E_y)/4\pi$. The components of force per unit length in the direction of the axes are

$$F_x = \int_C (P_{xx}\,dy - P_{xy}\,dx), \qquad F_y = \int_C (P_{yx}\,dy - P_{yy}\,dx),$$

so that the complex force is given by

$$F = F_y + i F_x = \frac{1}{8\pi}\int_C (k_1 E_x^2 - k_2 E_y^2)\,(dx + i\,dy) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_C E_x E_y\,(k_1\,dy - i\,k_2\,dx), \tag{7}$$

with $$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}.$$

Since

$$2\phi = w\,(p\,z + q\,\bar{z}) + \bar{w}\,(p\,\bar{z} + q\,z)$$

and

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right),$$

we obtain at once

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{(w' + \bar{w}')}{2\sqrt{k_1}}, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = i\,\frac{(w' - \bar{w}')}{2\sqrt{k_2}},$$

where

$$w' = \frac{\partial w}{\partial u}, \qquad \bar{w}' = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{u}}, \qquad u = p\,z + q\,\bar{z}.$$

After a little reduction (7) becomes

$$F = \frac{1}{32\pi}\int_c (w'^2 - \bar{w}'^2)\left\{\left(\sqrt{\frac{k_2}{k_1}} + \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\right)dz + \left(\sqrt{\frac{k_2}{k_1}} - \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\right)d\bar{z}\right\} + \\ + \frac{1}{16\pi}\int_c (w'^2 + \bar{w}'^2)\,dz. \tag{8}$$

If now we put $X\sqrt{k_1} = x$, $Y\sqrt{k_2} = y$, and suppose that the boundary C in the $x\,y$ plane becomes C_1 in the $X\,Y$ plane, then $p\,z + q\,\bar{z} = Z$ and (8) takes the simplified form

$$F = \frac{\alpha}{8\pi}\int_{C_1} W'^2\,dZ + \frac{\beta}{8\pi}\int_{C_1} \bar{W}'^2\,d\bar{Z}, \tag{9}$$

where

$$Z = X + i\,Y, \qquad w\,(p\,z + q\,\bar{z}) = W(Z), \qquad W' = \frac{\partial W}{\partial Z},$$

$$\bar{W}' = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{Z}}, \qquad 2\,\alpha = \sqrt{k_1} - \sqrt{k_2}, \qquad 2\,\beta = \sqrt{k_1} - \sqrt{k_2}.$$

The couple M is evaluated in a similar manner from the expression

$$M = \int_c x\,(P_{yx}\,dy - P_{yy}\,dx) - \int_c y\,(P_{xx}\,dy - P_{xy}\,dx).$$

Remembering that $(w'^2 + \bar{w}'^2)$ and $i\,(w'^2 - \bar{w}'^2)$ are both real, it is found that M is the real part of the expression

$$M + i\,N = \\ = \frac{1}{32\pi}\int_c z\,(w'^2 - \bar{w}'^2)\left\{\left(\sqrt{\frac{k_2}{k_1}} + \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\right)dz - \left(\sqrt{\frac{k_2}{k_1}} - \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\right)d\bar{z}\right\} + \\ + \frac{1}{16\pi}\int_c z\,(w'^2 + \bar{w}'^2)\,dz, \tag{10}$$

with the corresponding simplified form

$$M + i\,N = \frac{\alpha}{8\pi}\int_{C_1} (\alpha\,Z + \beta\,\bar{Z})\,W'^2\,dZ + \frac{\beta}{8\pi}\int_{C_1} (\alpha\,Z + \beta\,\bar{Z})\,\bar{W}'^2\,d\bar{Z}. \tag{11}$$

If $k_1 = k_2 = k$ the medium is homogeneous and (8), (9), (10), (11) reduce to the well-known Blasius form

$$F = \frac{k}{8\pi}\int_c \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz, \qquad M + i\,N = \frac{k}{8\pi}\int_c z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz. \tag{12}$$

As a matter of fact, formulae for F, M can be developed from the stress-system (6) without the assumption of an electric potential, for example, for a homogeneous medium

$$F = \frac{k}{8\pi}\int_C (E_x - iE_y)^2\,dz, \qquad M + iN = \frac{k}{8\pi}\int_C z\,(E_x - iE_y)^2\,dz. \tag{13}$$

The corresponding results for a cylinder in a steady incompressible inviscid fluid flow are

$$F = -\frac{1}{2}\varrho\int_C (u - iv)^2\,dz, \qquad M + iN = -\frac{1}{2}\varrho\int_C z\,(u - iv)^2\,dz, \tag{14}$$

where ϱ is the liquid density and u, v the fluid velocity components. We note that the motion need not be irrotational.

It should be understood that in (13), (14) the integrands are not analytic functions of z, but this difficulty disappears since on the boundary $\bar{z}$ is known in terms of z.

Results for magnetostatic fields are obviously similar.

§ 4. Boundaries of Discontinuity

Let us now suppose that C is a boundary of discontinuity separating two different dielectric media. The results already obtained can be readily adapted to find the mechanical force and couple experienced by the boundary when electric fields are present. Let F_i, M_i be respectively the force and couple deduced as in the previous section from the complex function w_i for the field present in the medium inside C, and F_0, M_0 the force and couple deduced from the complex function w_0 for the field in the material outside. The boundary will thus experience a total force and couple per unit length given respectively by

$$F_0 - F_i, \qquad M_0 - M_i. \tag{15}$$

It must be realized that although effects of electrostriction have been ignored throughout it is not always justifiable to do so. However, there are grounds for ignoring the tendency of the material to change its shape, since it is generally impossible to calculate electric fields unless we do so. Strictly speaking, if the two media are solid, then the nature of contact between them must be known before the forces can be determined. When the external material is a homogeneous isotropic fluid Stratton [4] shows that the mechanical force per unit length is given by a certain line-integral, which reduces simply to the contour integral F_0. In any case, experience shows that for many problems involving isotropic media in which there are no singularities inside C, F_i and M_i both vanish, and we are led to precisely the same result by using (15).

§ 5. Further Applications

Power [1] has shown that if $f_0\{p\,z + q\,g(z)\}$, where p, q are defined as before, and

$$g(z) \equiv \frac{-z\,(p^2+q^2) + \sqrt{z^2\,(p^2-q^2)^2 + 4\,a^2\,p\,q}}{2\,p\,q},$$

is a representation of the unperturbed complex potential of an electrical distribution in a homogeneous isotropic dielectric, constant k_0, lying entirely outside the uncharged elliptic cylinder whose cross-section is $x^2/k_1 + y^2/k_2 = a^2$ filled with homogeneous anisotropic material constants k_1, k_2, then the perturbed fields outside and inside the cylinder are derived respectively from

$$\left.\begin{aligned} w_0 &= f_0\{p\,z + q\,g(z)\} + A\,\bar{f}_0\left\{\frac{a^2}{p\,z + q\,g(z)}\right\}, \\ w_i &= E\,f_0\,(p\,z + q\,\bar{z}), \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

where

$$A = 2\,\lambda - 1, \qquad E = 2\,\lambda, \qquad \lambda = \frac{k_0}{k_0 + \sqrt{(k_1\,k_2)}}.$$

There are no other finite boundaries, and the coordinate axes have been chosen as usual. The form assumed by $f_0\{p\,z + q\,g(z)\}$ will depend upon the causes of the original field.

We now consider the following two examples, illustrating both the use of the above theorem and the method of calculating the resultant force on the boundary of the cylinder.

(*a*) *The elliptic cylinder in a uniform field*

Let this elliptic cylinder be placed in a uniform electric field of strength E in air and making an angle θ with the x-axis. At great distance from the cylinder the complex potential $w_0 \to E\,e^{-i\theta}\,z$, so that

$$f_0\{p\,z + q\,g(z)\} = \frac{E\,p\,e^{-i\theta}}{p^2 - q^2}\{p\,z + q\,g(z)\},$$

yielding

$$\left.\begin{aligned} w_0 &= \left(\frac{E\,p}{p^2-q^2}\right)\left\{e^{-i\theta}\,[p\,z + q\,g(z)] + \frac{G\,a^2\,e^{i\theta}}{p\,z + q\,g(z)}\right\}, \\ w_i &= J\,(p\,z + q\,\bar{z}), \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

where

$$G = \frac{1 - \sqrt{(k_1\,k_2)}}{1 + \sqrt{(k_1\,k_2)}}, \qquad J = \frac{(G+1)\,E\,p\,e^{-i\theta}}{p^2 - q^2}.$$

Since the boundary C is the ellipse $x^2/k_1 + y^2/k_2 = a^2$, the boundary C_1 is the circle $Z\,\bar{Z} = a^2$. Equation (9) shows

$$F_i = \frac{\alpha}{8\pi}\int_{C_1} J^2\,dZ + \frac{\beta}{8\pi}\int_{C_1} J^2\,d\bar{Z},$$

where $-d\bar{Z} = a^2 Z^{-2}\, dZ$, so that

$$F_i = 0. \tag{18}$$

Similarly from (11)

$$M_i + i N_i = \frac{\alpha}{8\pi} \int_{c_1} \left(\alpha Z + \beta \frac{a^2}{Z}\right) J^2\, dZ - \frac{\beta}{8\pi} \int_{c_1} \left(\alpha Z + \beta \frac{a^2}{Z}\right) \frac{\bar{J}^2 a^2}{Z^2}\, dZ,$$

leading to

$$M_i = \frac{i a^2}{16} (k_1 - k_2)(J^2 - \bar{J}^2). \tag{19}$$

To obtain F_0, M_0 we use (12) integrated round the ellipse, but, since there are no singularities of the integrands, we may instead integrate round S, a circle of very large radius. This means that we expand $p z + q g(z)$ in the form

$$p z + q g(z) = \left(\frac{p^2 - q^2}{p}\right)\left(z + \frac{H}{4z} + \ldots\right), \tag{20}$$

where $H = \dfrac{4 a^2 p q}{(p^2 - q^2)^2}$.

Similarly

$$\frac{1}{p z + q g(z)} = \left(\frac{p}{p^2 - q^2}\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{H}{4 z^3} + \ldots\right). \tag{21}$$

From (17)

$$\frac{dw_0}{dz} = E e^{-i\theta}\left(1 - \frac{H}{4 z^2} \ldots\right) - \frac{E G p^2 a^2 e^{i\theta}}{(p^2 - q^2)^2}\left(\frac{1}{z^2} + \ldots\right),$$

so that the coefficient of $1/z$ in $(dw_0/dz)^2$ is zero, and hence

$$F_0 = 0. \tag{22}$$

The coefficient of $1/z$ in $z\,(dw_0/dz)^2$ is

$$-\frac{2 E^2 a^2 (G p^2 + p q e^{-2i\theta})}{(p^2 - q^2)^2},$$

hence

$$M_0 = -\frac{E^2 a^2 p q \sin 2\theta}{2 (p^2 - q^2)^2} = \frac{E^2 a^2}{8} (k_1 - k_2) \sin 2\theta. \tag{23}$$

The resultant force on the boundary from (18), (22) is zero, and the torque, $M_0 - M_i$, is proportional to $\sin 2\theta$, where M_0 and M_i are given by (23), (19).

Note that if $k_1 = k_2 = k$, the boundary becomes a circle, the material inside becomes isotropic, and the resultant force and torque are both zero.

(*b*) *External line charge*

Let there be a line charge in air at the point $z = \gamma$ outside the elliptic cylinder. The unperturbed complex potential may be taken to

be $m \log (z - \gamma)$, so that as $z \to \gamma$, $w_0 - m \log (z - \gamma) \to$ const. and hence we may take

$$f_0 \{p z + q g(z)\} = m \log \{p z + q g(z) - \delta\}, \qquad \text{with} \qquad \delta = p \gamma + q g(\gamma).$$

From (16),

$$\left.\begin{aligned} w_0 &= m \log \{p z + q g(z) - \delta\} - G m \log \left\{\frac{a^2}{p z - q g(z)} - \bar{\delta}\right\}, \\ w_i &= K \log (p z + q \bar{z} - \delta), \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

where $K = \dfrac{2}{1 + \sqrt{(k_1 k_2)}}$.

Equation (9) shows

$$F_i = \frac{\alpha}{8\pi} \int_{C_1} \frac{K^2 m^2}{(Z - \delta)^2} dZ - \frac{\beta}{8\pi} \int_{C_1} \frac{K^2 m^2}{(\bar{Z} - \bar{\delta})^2} d\bar{Z},$$

where $Z \bar{Z} = a^2$, so that

$$F_i = 0. \tag{25}$$

Similarly from (11) we deduce that

$$M_i = \frac{i a^2}{16} m^2 E^2 (k_1 - k_2) \left\{\frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\bar{\delta}^2}\right\}. \tag{26}$$

In order to obtain F_0, we use the fact that

$$F_0 = \frac{1}{8\pi} \int_C \left(\frac{dw_0}{dz}\right)^2 dz = \frac{1}{8\pi} \int_S \left(\frac{dw_0}{dz}\right)^2 dz - \frac{1}{8\pi} \int_\varepsilon \left(\frac{dw_0}{dz}\right)^2 dz, \tag{27}$$

where S is a circle of large radius, and ε is a small contour surrounding the point $z = \gamma$.

For the integral round S we expand as in example (a), and we obtain at once

$$\frac{1}{8\pi} \int_S \left(\frac{dw_0}{dz}\right)^2 dz = 0. \tag{28}$$

For the integral round ε, we note that if $z = \gamma + \zeta$, where ζ is small, $p z + q g(z)$ behaves like $s \zeta + \delta$, where

$$2 p s = \frac{\gamma (p^2 - q^2)^2}{\sqrt{\{(p^2 - q^2)^2 \gamma^2 + 4 a^2 p q\}}} + (p^2 - q^2). \tag{29}$$

On ε, w_0 may be taken to be

$$w_0 = m \log s \zeta + G m \log \left(\frac{a^2}{s \zeta + \delta} - \bar{\delta}\right),$$

so that on expanding in powers of ζ,

$$\frac{1}{8\pi} \int_\varepsilon \left(\frac{dw_0}{d\zeta}\right)^2 d\zeta = \frac{i G s m^2 a^2}{2 \delta (\delta \bar{\delta} - a^2)}. \tag{30}$$

Combining (25), (27), (28), (30) the complex force on the boundary is

$$F = \frac{i\,G\,s\,a^2\,m^2}{2\,\delta\,(a^2 - \delta\,\bar{\delta})},$$

where s is given by (29).

In a similar manner, the torque is found to be

$$M = \mathrm{Re}\left\{\frac{i\,G\,s\,\gamma\,a^2\,m^2}{2\,\delta\,(a^2 - \delta\,\bar{\delta})}\right\}. \tag{31}$$

Finally we remark that if the material inside the boundary is isotropic, constant k, we set $k_1 = k_2 = k$, the boundary becomes a circle of radius $b = a\sqrt{k}$, $s = p = 1/\sqrt{k}$, $\delta = p\,\gamma$. Equations (30), (31) show that the resultant complex force per unit length on a circular isotropic dielectric cylinder of radius b in the presence of an external line charge at $z = \gamma$ is

$$F = \frac{i\,(1 - k)\,b^2\,m^2}{2\,(1 + k)\,\gamma\,(b^2 - \gamma\,\bar{\gamma})}.$$

and the torque is zero, results which are easily verified by elementary methods.

Bibliography

1. G. Power, Theorem concerning anisotropic dielectrics. British Journal of Applied Physics **10**, 32–34 (1959).
2. G. Power and H. L. W. Jackson, Certain two-dimensional solutions to Poisson's equation. Applied Scientific Research B **7**, 249–256 (1958).
3. G. H. Livens, The theory of Electricity. Cambridge University Press, 1918. Chapter 4.
4. J. A. Stratton, Electromagnetic theory. New York: McGraw-Hill, 1941, first edition page 152.

Adolf Gustav Smekal †

Am 7. März 1959 ist Adolf Smekal für immer von uns gegangen. Sein Gesundheitszustand war wohl die letzten Jahre schon nicht mehr der beste. Aber der Tod kam ganz überraschend. Das Befinden des Dahingegangenen schien ganz befriedigend und doch schlief er ein, um nicht mehr zu erwachen.

Smekal wurde am 12. September 1895 in Wien geboren, als Sohn des k. u. k. Hauptmannes, nachmaligen Feldzeugmeisters, Gustav Smekal und dessen Ehefrau Wilhelmine, geb. Hauptmann. Der Vater stammte aus Olmütz in Mähren, auch Großvater und Urgroßvater der väterlichen Linie waren schon dorthin zuständig. Die Mittelschule absolvierte der künftige Physiker an den damaligen verschiedenen mährischen Garnisonen seines Vaters und legte die Reifeprüfung 1912 an der I. Staatsrealschule in Olmütz mit Auszeichnung ab. Sein Hochschulstudium erstreckte sich auf die Fächer Physik, Mathematik, Chemie, Astronomie und Mineralogie. Als Realschulabsolvent besuchte er, den damaligen Vorschriften Genüge leistend, 1912/13 erst die Allgemeine Abteilung der Technischen Hochschule in Wien, um das Studium 1913/17 an der Philosophischen Fakultät der Universität Graz fortzusetzen. Am 14. Juni 1917 promovierte er mit einer theoretisch-physikalischen Arbeit als Schüler von Michael Radaković, der übrigens entfernt mit ihm verwandt war. Im gleichen Sommersemester legte er auch die Prüfung aus Chemie und die philosophisch-pädagogische Vorprüfung für das Mittelschullehramt ab. Wegen dauernder militärischer Untauglichkeit konnte er auch ins Ausland gehen und so setzte er 1917/19 das Studium der Physik und Mathematik an der Philosophischen Fakultät der Universität Berlin weiter fort, wo hauptsächlich Einstein, Planck, Rubens und Warburg seine Lehrer waren. Im Frühjahr 1918 besuchte er auch die zum 60. Geburtstag von Max Planck veranstaltete feierliche Woche in Göttingen, in der Planck die weiterentwickelte dritte Fassung seiner Quantentheorie vortrug, die sich allerdings nicht allzulange halten sollte, da sich mit der Zeit die erste einfache Fassung schließlich endgültig durchsetzte.

Die damalige Planck-Woche besuchte auch Flamm aus Wien und lernte so Smekal persönlich kennen. In Wien war damals folgendes im Fluß. Jäger, der bis dahin die I. Lehrkanzel für Physik an der Technischen Hochschule innegehabt hatte, war als Nachfolger Hasenöhrls an das Institut für Theoretische Physik der Universität berufen worden.

Mache, der die II. Lehrkanzel für Physik an der Technischen Hochschule innehatte, wurde als Nachfolger Jägers mit der I. Lehrkanzel für Physik betraut. Flamm war zweiter Assistent Prof. Jägers an der Technischen Hochschule gewesen, hatte an dessen Lehrkanzel aber nur die Bibliothek zu betreuen und war als wissenschaftlicher und Vorlesungs-Assistent aber bei Mache verpflichtet, da die II. Lehrkanzel für Physik damals noch keinen eigenen Assistenten besaß. Als Nachfolger Maches für die II. Lehrkanzel für Physik hatte das Professorenkollegium der Technischen Hochschule bereits Flamm primo loco in Vorschlag gebracht. Im Fall der Ernennung Flamms war dann die von ihm an der Technischen Hochschule innegehabte Assistentenstelle neu zu besetzen. So stellte Flamm schon damals in Göttingen an Smekal die Frage, ob er nicht Lust habe, gegebenenfalls diese freiwerdende Assistentenstelle in Wien zu übernehmen. Eine bindende Zusage hat Smekal damals noch nicht gegeben.

Die unsicheren politischen Verhältnisse im Gefolge des unglücklich verlorenen Krieges zogen die Ernennung Flamms in die Länge; er wurde erst im Frühjahr 1919 zum Professor der II. Lehrkanzel für Physik an der Technischen Hochschule in Wien bestellt. Nun nahm Smekal die angebotene Stelle an, als zweiter Assistent von Prof. Mache, aber nur dessen Bibliothek betreuend, bei Prof. Flamm aber als wissenschaftlicher und Vorlesungs-Assistent verpflichtet. Sogleich schloß sich Smekal in Wien auch dem Kreis um Thirring von Damen und Herren zur gemeinsamen Erholung an und machte dessen Ausflüge mit. Flamm aber hatte die Freude, in Smekal einen erfahrenen Tourengefährten zu gewinnen, dem er sich auf Gletschern ruhig anvertrauen konnte.

Nach dem Rücktritt Franz Exners vom Lehramte im Jahre 1920 übernahm Jäger auf Wunsch der Fakultät das II. Physikalische Institut der Wiener Universität und schlug Hans Thirring als seinen Nachfolger am Institut für Theoretische Physik vor. Im Herbst 1920 ergriff auch Smekal die Gelegenheit, als Assistent Jägers an das II. Physikalische Institut der Wiener Universität hinüberzuwechseln. Es war damals schwierig, einen geeigneten Nachfolger für ihn als Assistenten der Technischen Hochschule zu finden. Sogleich habilitierte sich Smekal auch als Privatdozent für das Gesamtgebiet der Physik an der Wiener Universität. Er konnte diese venia legendi 1921 auch auf die Wiener Technische Hochschule übertragen. Im Jahre 1923 wurde Smekal als Honorardozent an der Technischen Hochschule in Wien mit der Abhaltung der Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen der Physik" an der neugegründeten Abteilung für Technische Physik betraut. Im Jahre 1927 erhielt er den Titel eines a. o. Professors der Wiener Universität, auch wurde er von der Akademie der Wissenschaften in Wien für Untersuchungen über die Feinstruktur der Röntgenspektren mit dem halben Haitinger-Preis ausgezeichnet.

Im Herbst 1928 nahm Smekal eine Berufung als Ordinarius für Theoretische Physik und Direktor des Institutes für Theoretische Physik

an die preußische Universität Halle a. d. Saale an, wo ihm gleichzeitig größere experimentelle Forschungsmöglichkeiten zur Verfügung gestellt wurden, die ihm umfangreiche Untersuchungen zur Physik der Festkörper ermöglichten. Eine gleichzeitige Berufung an die Universität Würzburg hat Smekal abgelehnt, ebenso die Berufung 1932 33 an die Technische Hochschule München für Theoretische und für Technische Physik. Im Jahre 1936 wurde Smekal von der Universität Graz, im Jahre 1938 von der Universität Wien an bevorzugter Stelle in Berufungsvorschlägen genannt. In den Jahren von 1927 bis 1939 wurde Smekal zu Internationalen Kongressen und Tagungen eingeladen, nach Italien, Holland, England und Rußland. Er wurde 1931 zum Mitglied der Kaiserlich Leopoldinischen Deutschen Akademie der Naturforscher in Halle gewählt.

Smekal verheiratete sich 1942 mit Gertrud Eschenburg, herstammend aus Wittenburg in Mecklenburg. Die Heirat fand am 30. Mai in Güstrow in Mecklenburg statt. Der Ehe entsproß ein Sohn Helmuth, der am 17. Oktober 1943 in Halle geboren wurde. Ende Juni 1945 wurde Smekal mit seiner Familie auf Veranlassung amerikanischer Stellen aus Halle a. d. Saale nach Westdeutschland evakuiert, was mit einschneidenden materiellen Verlusten verknüpft war. Der neue Wohnsitz war dann Nieder-Roden in Hessen. An der Technischen Hochschule in Darmstadt konnte Smekal seine Tätigkeit als Hochschullehrer fortsetzen. Die dortige Fakultät für Mathematik und Physik nahm ihn damals auch als Vertreter für den von Darmstadt abwesenden Professor Scherzer in Anspruch. In Berufungsvorschlägen für experimentelle Physik wurde Smekal 1946 an der Universität Mainz und 1947 an der Bergakademie in Clausthal an bevorzugter Stelle für ordentliche Professuren namhaft gemacht, auch 1949 an der Universität Leipzig. An wissenschaftlichen Kongressen nahm Smekal 1948 in England und Österreich teil, 1949 in Österreich und den USA. Als deutscher Vertreter war er beauftragt, an der Wiederaufnahme der internationalen wissenschaftlichen Beziehungen mit England und den Vereinigten Staaten mitzuwirken.

Am 11. November 1949 wurde Smekal zum Ordinarius für experimentelle Physik der Universität Graz ernannt, wo er ab Dezember 1949 als Vorstand des Physikalischen Institutes tätig war. Im Frühjahr 1950 erhielt er eine Einladung zur Teilnahme an der Jahrestagung der Faraday Society in Liverpool sowie Einladungen zu wissenschaftlichen Tagungen in Westdeutschland. Im Juli 1950 war er zu Sitzungen der International Commission on Glass nach Bern eingeladen. Und so ging das weiter. Was wir aber ganz besonders der Tatkraft Smekals nach seiner Rückkehr nach Österreich zu danken haben, ist die Gründung der Österreichischen Physikalischen Gesellschaft, auch war er die Haupttriebkraft für deren nicht erlahmende Regsamkeit. Schade, daß er dann körperlich nicht mehr auf der Höhe war, das Herz nicht mehr einwandfrei funktionierte, was schließlich auch sein vorzeitiges Lebensende herbeiführte.

Seine zahlreichen wissenschaftlichen Arbeiten, die Bücher, die er schrieb und herausgab, sie alle finden sich aufgezählt in Poggendorffs Biographisch-Literarischem Handwörterbuch. Sie haben ihn weit bekanntgemacht. So berichtet auch das Schweizer Lexikon darüber: „Bau und Eigenschaften der festen Körper. Smekal arbeitete auch über Quanten- und Atomtheorie und sagte 1923 den 1928 von Raman entdeckten Streueffekt (Smekal-Raman-Effekt) voraus." Die Österreichische Akademie der Wissenschaften in Wien hat Smekal 1950 zum korrespondierenden, 1952 zum wirklichen Mitglied gewählt, auch war er korrespondierendes Mitglied der Akademie der Wissenschaften und der Literatur Mainz. Professor Smekal fungierte ab 1936 als Vorsitzender des Fachausschusses „Zerkleinerungstechnik" der Fachgruppe Verfahrenstechnik des Vereines Deutscher Ingenieure und war stellvertretender Vorsitzender des Fachausschusses I der Deutschen Glastechnischen Gesellschaft. Unsere Trauer gilt in gleicher Weise dem Verlust des Wissenschaftlers wie des Menschen.

L. Flamm, Wien

Berichtigung und Nachtrag

zur Abhandlung „Die Temperaturwaage, ein MKSA-Normthermometer" von E. Bodea, Porto Alegre, Acta Physica Austriaca, Band XII, Heft 3, S. 220 bis 236 (1959).

In der obigen Studie wurde der Nachweis erbracht, daß die natürliche Temperatureinheit des MKSA-Einheitensystems 1 Joule dekad. Mol ist. Es wurde auch darauf hingewiesen, daß die entsprechende Einheit der molekularen Äquipartitions-Energie 10^{-24} Joule/Molekül und Freiheitsgrad ist. Es hat sich aber leider in Punkt 4 der Schlußfolgerungen ein Druckfehler eingeschlichen, wo 10^{-2} statt 10^{-24} stehen blieb.

Ergänzend zu den Ausführungen sei nun noch auf die in der Atomistik stark eingebürgerte Energieeinheit Elektronenvolt (eV) eingegangen. Obwohl sie eine hybride Einheit ist, stellt sie vielleicht den ersten Schritt zur Einführung eines natürlichen atomistischen Maßsystems dar, das sich auf die vier Naturkonstanten

Elementarladung $e = 1{,}6021 \cdot 10^{-19}$ C

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum $c = 2{,}997_9 \cdot 10^8$ ms^{-1}

Diracs Magnetismusquantum $\varphi = e \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 6{,}035 \cdot 10^{-17}$ Wb

Compton-Frequenz $\nu_c = \frac{m_0 c^2}{h} = 1{,}236 \cdot 10^{20}$ s^{-1}

aufbauen läßt[1].

Da dem eV natürlich auch die Rolle einer molekularen Wärmeeinheit zufällt, kann man ihm noch folgende thermischen Einheiten zuordnen:

$$1 \frac{\text{eV}_{\text{kin}}}{\text{therm. Partikel}} \text{ als molekulare Temperatureinheit,} \qquad (1)$$

$$1 \frac{\text{eV}}{\text{therm. Partikel} \times \text{Freiheitsgrad}} \text{ als Einheit der Äquipartitionsenergie.} \qquad (2)$$

Beide Einheiten können sich selbstverständlich nur auf Mittelwerte beziehen, die sich aber auch dann ermitteln lassen, wenn das Äquipartitionsgesetz nicht erfüllt wird und die Freiheitsgrade der einzelnen thermischen Partikeln nicht gleichmäßig angeregt sind.

Aus den Werten von

$$1 \text{ eV} = 1{,}602_1 \cdot 10^{-9} \text{ J}, \qquad \text{bzw.} \qquad 1 \text{ J} = 6{,}2419_2 \cdot 10^{18} \text{ eV} \qquad (3)$$

[1] E. Bodea, A four-dimensional Atomistic Measure System. Anais da Academia Brasil de Ciencias, T. XXIII, Nr. 1, 1951 und

E. Bodea, Ein natürliches Maß-System der Atomistik. Die Technik, Hippolyt-Verlag, Wien, 2. Jg., H. 1, 1952.

und der Äquivalenzbeziehung

$$1^0\,\mathrm{K} = \frac{3}{2} \cdot 13{,}803_1 \frac{\mathrm{J}}{\text{D-Mol}} = 20{,}704_5 \cdot 10^{-24} \frac{\mathrm{J}}{\text{therm. Part.}} \tag{4}$$

ergeben sich die folgenden Umrechnungsgleichungen

$$1 \frac{\mathrm{J}}{\text{D-Mol}} = 10^{-24} \frac{\mathrm{J}}{\text{therm. Part.}} = 6{,}2419_2 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{eV_{kin}}}{\text{Part.}} =$$

$$= 2{,}0806 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{eV}}{\text{Part} \times \text{Freiheitsgrad}} \tag{5}$$

$$1^0\,\mathrm{K} = 20{,}704_5 \cdot 10^{-24} \frac{\mathrm{J}}{\text{therm. Part.}} = 1{,}2923_6 \cdot 10^{-4} \frac{\mathrm{eV_{kin}}}{\text{Part.}} =$$

$$= 4{,}3078_6 \cdot 10^{-3} \frac{\mathrm{eV}}{\text{Part.} \times \text{Freiheitsgrad}} . \tag{6}$$

Diese Gleichungen führen z. B. für $t = 20^0$ C zu folgenden Werten:

$$T = 293{,}16\,^0\mathrm{K} = 6069{,}7_3 \frac{\mathrm{J}}{\text{D-Mol}} = 0{,}0378_8 \frac{\mathrm{eV_{kin}}}{\text{Part.}} =$$

$$= 0{,}0126_3 \frac{\mathrm{eV}}{\text{Part.} \times \text{Freiheitsgrad}} . \tag{7}$$

Wie aus diesem Beispiel ersichtlich ist, könnten somit mit der Temperatur-Waage beliebige Thermometer auch direkt in $\mathrm{eV_{kin}}$/Partikel oder in eV/Part. × Freiheitsgrad geeicht werden, so daß man an ihnen direkt die effektive mittlere kinetische Energie der Translation oder Vibration einer Partikel eines gegebenen Schwarms, oder die mittlere Energie je Partikel und Freiheitsgrad ablesen könnte.

Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei noch erwähnt, daß man auf diesem Wege auch die einer gegebenen Temperatur entsprechende wahrscheinlichste Bewegungsenergie $m\,v_p^2/2$ der einzelnen Partikeln eines Schwarms ermitteln kann. Dies geht auf so einfache Weise jedoch nur, wenn der Partikelschwarm eine Maxwellsche Energieverteilung aufweist. (Für die Neutronen in einem Reaktor trifft dies allerdings wegen der bekannten Verhärtungserscheinung durch die stärkere Absorption langsamer Neutronen nicht zu.) Nur in diesem Falle gilt nämlich die Beziehung

$$\overline{v}^2 = \frac{3}{2} v_p^2 \tag{8}$$

Man erhält also durch Temperaturmessungen mit Thermometern, die wie oben beschrieben geeicht wurden, direkt nur den Wert der mittleren kinetischen Energie je Partikel, z. B. entsprechend (7) für $t = 20^0$ C

$$\frac{\overline{m\,v}^2}{2} = 6{,}0699_1 \cdot 10^{-21} \frac{\mathrm{J_{kin}}}{\text{Part.}} = 0{,}0378_8 \frac{\mathrm{eV_{kin}}}{\text{Part.}} ; \tag{9}$$

hingegen nur im Falle Maxwellscher Energieverteilung auch die wahrscheinlichste kinetische Energie der gegebenen Partikeln unter Anwendung von (8), also z. B. für $t = 20^0$ C

$$\frac{m\,v_p^2}{2} = \frac{2}{3} \cdot 0{,}0378_8 \frac{\mathrm{eV_{kin}}}{\text{Part.}} = 0{,}0252_8 \frac{\mathrm{eV_{kin}}}{\text{Part.}} , \tag{10}$$

sowie auch die mittlere Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_p = 1{,}128\, v_p. \tag{11}$$

Man beachte, daß der aus der Reaktortheorie bekannte wahrscheinlichste Wert der kinetischen Energie einzelner Partikel bei $t = 20^0$ C unmittelbar die Richtigkeit der Umrechnungsgleichung (4) bestätigt, die der Gleichung (7) zugrunde liegt. In gleicher Weise geht auch aus der Gleichung (4) die physikalische Berechtigung der Wahl von J/D-Mol als makrophysikalische Temperatureinheit sowie der Eliminationsgleichung der molaren Gaskonstanten $R = 2/3$ hervor.

Buchbesprechungen

Leitfaden des Strahlenschutzes. Für Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner. Von H. R. Beck, H. Dresel und H. J. Melching. Mit einem Geleitwort von H. Langendorff. Mit 100 Abb., 19 Tabellen. XII, 253 S. Stuttgart: Georg Thieme Verlag, 1959. DM 36.

Eine zusammenfassende Darstellung über die Fragen des Strahlenschutzes, in gleicher Weise für Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner bestimmt, ist ein sehr dankenswertes Unternehmen. Wohl gibt es eine Reihe von Darstellungen über dieses, heute so weite Kreise in Atem haltende Thema, um nur an das Buch von Rajewsky zu erinnern. Doch richten sich diese Darstellungen in ihrer Form und in ihrem Aufbau meist an einen kleineren Kreis. Da jedoch auf Grund vielseitiger Verwendung radioaktiver Isotope in Industrie und medizinischer Praxis in immer zunehmenderem Maße nicht ausgesprochene Fachleute mit radioaktiver Strahlung zu tun haben und die Bemühungen um eine entsprechende Gesetzgebung in ein entscheidendes Stadium getreten sind, ist eine zusammenfassende auch in ihren Grundlagen leicht verständlich gehaltene Darstellung unbedingt zu begrüßen. Vom vorliegenden Buch kann ohne weiteres behauptet werden, daß es dieser Forderung gerecht wird. In leicht faßlicher Weise findet man die wichtigsten physikalischen Eigenschaften der verschiedenen Strahlungsarten und die sich daraus ergebenden Meßmethoden. Aufbauend auf die biologischen Strahlenwirkungen wird ausführlich auf die Schädigungen im menschlichen Organismus und die genetischen Strahlenschäden eingegangen. Die strahlenmäßigen Belastungen durch radioaktiven Niederschlag, Fernsehapparate u. a. werden in ihrem Ausmaß diskutiert. Am Ende wird in klarer Weise auf die Maßnahmen zum Strahlenschutz sowohl der Gesamtbevölkerung wie besonders ausgesetzter Einzelpersonen eingegangen. Maßnahmen für Katastrophenfälle werden ebenfalls behandelt. Ein kurzes Fachlexikon zur Erläuterung der wichtigsten Begriffe aus Physik, Medizin und Biologie bildet den Abschluß. An jedes Kapitel ist ein ausführliches Literaturverzeichnis angeschlossen, mit dessen Hilfe der Leser seine Kenntnisse über den Rahmen des vorliegenden Buches hinaus vertiefen kann.

Dem Rezensenten erscheint diese zusammenfassende Darstellung vor allem für die Kreise der mit dem Problem befaßten Industrieingenieure, Mediziner, Juristen und auch Politiker sehr empfehlenswert. Zumal sie durchaus geeignet ist manche unter ihnen herrschende Konfusion auf dem Gebiete des Strahlenschutzes und verwandter Probleme zu beseitigen, die manchmal mehr Aufregung als notwendig verursacht.

N. Pucker, Graz

Atomphysik und menschliche Erkenntnis. Von Niels Bohr. Mit 8 Abb., VII, 104 S. (Sammlung die Wissenschaft: Band 112). Braunschweig: Verlag Friedrich Vieweg u. Sohn. 1958. Halbl. DM 9.40.

Der Verlag hat sich ein großes Verdienst erworben, in seiner Sammlung „Die Wissenschaft" Niels Bohr zu Wort kommen zu lassen. Es handelt sich um eine Zusammenstellung von Arbeiten, die der berühmte Forscher in den letzten 25 Jahren aus verschiedenen Anlässen geschrieben hat. Der Inhalt befaßt sich mit den all-

gemeineren erkenntnistheoretischen Themen, ist aber gerade als Ausdruck der Lebensanschauung Bohrs für jeden naturwissenschaftlich interessierten Leser von größter Bedeutung. Das Erscheinen dieser Abhandlungen wird daher von allen Physikern auf das lebhafteste begrüßt werden. F. Koller, Graz

Asymptotic Methods in Analysis. Von N. G. de Bruijn. XII, 200 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Campany, Groningen: P. Noordhoff Ltd. 1958. hfl. 20.—.

Das vorliegende Buch behandelt ein Gebiet, welches nicht allein für viele Zweige der Mathematik, sondern auch für die theoretische Physik von großer Wichtigkeit ist. Es gibt zwar einige Darstellungen der Sattelpunktsmethode, wie z. B. in dem berühmten Werk Courant-Hilbert, aber nirgends eine so eingehende Behandlung dieses Problems. Das Buch bringt die wichtigsten asymptotischen Methoden und stellt sie an Hand von Beispielen klar dar. Auch die dabei auftretenden Schwierigkeiten werden erörtert und die Technik der Durchführung in vollem Umfange besprochen. Es stellt daher speziell für den theoretischen Physiker eine große Fundgrube dar und ist allen Fachkollegen wärmstens zu empfehlen. P. Urban, Graz

Einführung in die Theoretische Physik, Band V: Statistische Mechanik. Von W. Döring. Mit 12 Textabb., 113 S. [Sammlung Göschen: Band 1017.] Berlin: Walter de Gruyter u. Co. 1957. DM 2.40.

Mit der statistischen Mechanik liegt das letzte Bändchen der Einführung in die theoretische Physik vor.

Das Hauptgewicht ist auf die allgemeinen Aussagen der statistischen Mechanik gelegt, besonders auf den Beweis des zweiten Hauptsatzes. Wo die Quantenmechanik zu Abänderungen führt, sind die Resultate angegeben. Der Student, an den sich das Büchlein ja wendet, wird vor allem das sehr ausführliche Literaturverzeichnis begrüßen, das ihn einladet, sich weiter mit der Materie zu beschäftigen.

Die Darstellung ist lebendig und klar. Der Versuch, mit fünf kleinen Göschen-Bändchen einen Eindruck vom Wesen und den Methoden der theoretischen Physik zu geben kann durchaus als gelungen bezeichnet werden. H. Neuer, Graz

Sound Pulses. Von F. G. Friedlander. (Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics). VII, 202 S. Cambridge: University Press. 1958. Geb. 40s. net.

Das Buch bringt eine eingehende theoretische Behandlung aperiodischer Schallvorgänge, wobei nicht mit der üblichen Methode der Fourieranalyse in harmonische Komponenten gearbeitet, sondern unmittelbar von linearen partiellen Differentialgleichungen des hyperbolischen Typs ausgegangen wird. Der Hauptteil ist der geometrischen Akustik und ihren Anwendungen auf die Reflexion und Brechung von Schallimpulsen gewidmet. Die praktische Bedeutung dieses Gebietes für die Unterwasser-Schallortung, raumakustische Fragen, Stoßwellenprobleme u. a. dürfte dem Werk seinen Interessentenkreis sichern. Hervorzuheben ist die Gründlichkeit der Darstellung. Spezielle mathematische Fragen werden in einem Anhang einer gesonderten Behandlung unterworfen. L. Hanke, Graz

Extensive Air Showers. Von William Galbraith, Ph. D. Mit zahlreichen Textabb., XVI, 211 S. London: Butterworths Scientific Publications. 1958. 40s.

Das eben erschienene Buch gibt einen Abriß unserer Erkenntnisse über die extensiven Luftschauer der letzten 20 Jahre seit der Entdeckung derselben. Es richtet sich hauptsächlich an Studierende höherer Semester, kann aber auch als

Nachschlagwerk für jeden auf diesem Gebiet arbeitenden Experimentalphysiker empfohlen werden. Neben den experimentellen Anordnungen findet man auch sehr klare und verständliche Ableitungen der verschiedenen theoretischen Überlegungen, wie z. B. die Theorie des CERENKOV-Effektes, der heute sehr aktuell ist. Auch die Theorie des Ursprungs der kosmischen Strahlen sind übersichtlich behandelt worden. Die statistische Analyse der Resultate wird ebenfalls in einem Anhang sehr hübsch gezeigt. Ein sehr ausführliches Schriftenverzeichnis als Abschluß gestattet dem Leser Spezialfragen nachzuschlagen. P. URBAN, Graz

Les problèmes aux limites de la physique mathématique. Von H. G. GARNIR. Mit 5 Abb., 234 S. [Mathematische Reihe: Bd. 23.] Basel und Stuttgart: Birkhäuser-Verlag. 1958. Geb. DM/sfr. 29.—.

Der Verfasser befaßt sich seit einer Reihe von Jahren mit Problemen, die an der Grenze der mathematischen Physik liegen. Das vorliegende Werk führt in die Theorie der linearen Operatoren ein und behandelt als Beispiel das Problem von DIRICHLET-NEUMANN unter Zugrundelegung des Operators

$$a\frac{\partial^2}{\partial t^2} + b\frac{\partial}{\partial t} + c - \Delta, \qquad \Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

(a, b, c reell, $a > 0$)

Durch eine spezielle LAPLACE-Transformation in bezug auf die Zeit, gelingt dem Verfasser die Zurückführung des Operators auf einen metaharmonischen Operator, den er dann allgemein diskutiert. Das Werk zeichnet sich nicht nur durch eine sehr klare und verständliche Schreibweise aus, sondern behandelt alle Probleme von durchaus modernen Standpunkten aus, ohne überflüssige Hypothesen. Die Ergebnisse sind direkt verwertbar, z. B. auf die Theorie der GREENschen Funktion, auf welchem Gebiete der Verfasser ebenfalls bahnbrechend gearbeitet hat. Als Vorkenntnisse werden nur die Theorie der reellen Funktionen, FOURIER und LAPLACE-Transformationen und die Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen vorausgesetzt. Jedem theoretischen Physiker wird das Werk eine gute Grundlage auf diesem heute sehr aktuellen Gebiete vermitteln.

P. URBAN, Graz

Lineare Algebra. Von W. GRAEUB. [Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 97.] Mit 7 Textabb., XI, 219 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. DM 35.70, geb. DM 39.—.

In Abweichung von dem meist eingeschlagenen Wege über den n-dimensionalen Zahlenraum beginnt diese Darstellung der linearen Algebra mit der axiomatischen Einführung des reellen Vektorraumes. Dabei werden, ebenfalls axiomatisch festgelegt, nur solche von endlicher Dimension zugelassen und ihre wichtigsten Gesetze entwickelt. Es folgt dann eine Betrachtung der linearen Abbildungen mit besonderer Berücksichtigung des dualen Raumes und der dualen Abbildung. Damit sind schon die meisten Sätze über lineare Gleichungssysteme gegeben; es bedarf lediglich noch, sie auch in deren Sprache zu übertragen. So gelangt man zwanglos zur Matrizenrechnung und zur Lösung linearer Gleichungssysteme durch Elimination. Erst hernach wird, wieder über axiomatisch definierte allgemeine Determinantenfunktionen, die Determinante einer Matrix eingeführt; ihre Eigenschaften folgen daraus rasch. Mit Hilfe der schiefsymmetrischen Determinantenfunktion wird dann auch eine koordinatenfreie Definition der Orientierung gegeben und die Topologie in linearen Räumen gebracht. Hierauf schließt sich ausführlich bereits die Tensorrechnung in ihrer komponentenfreien Einführung an. Die

weiteren Kapitel widmen sich den EUKLIDischen Räumen mit ihren wichtigsten Abbildungen und den Eigenwertproblemen, den quadratischen Funktionen und den Flächen zweiter Ordnung in affiner und metrischer Klassifikation. Als eingestreutes Beispiel findet sich hiebei auch der in der Relativitätstheorie bekannte MINKOWSKIsche Raum mit Vor- und Nachkegel. Komplexe lineare Räume scheinen in den beiden Schlußkapiteln auf, wobei im letzten noch die Theorie der Zerlegung in invariante Unterräume erörtert ist. — An manchen Stellen sind verhältnismäßig einfache Übungsaufgaben dem Leser überlassen. A. AIGNER, Graz

Grimsehl: Lehrbuch der Physik. Band I: Mechanik, Wärmelehre, Akustik. Sechzehnte Aufl. Herausgegeben von W. SCHALLREUTER. Mit 722 Abb., IX, 632 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1955. Geb. DM 21.40.

Das Lehrbuch der Physik von GRIMSEHL zählt zu den besten Lehrbüchern dieses Faches. Es vermittelt den Stoff in besonders anschaulicher und übersichtlicher Form.

Die neueste Auflage des 1. Bandes wurde an einigen Stellen erweitert, so die Paragraphen über Beugung und Energie einer Welle und vor allem der Abschnitt über Wärmekraftmaschinen. Die Qualität des verwendeten Papiers wurde verbessert, so daß die äußere Ausstattung nun in jeder Hinsicht lobenswert ist. Auch wurden wichtige Korrekturen durchgeführt, aber leider unvollständig. So sollte man z. B. nicht von der Anordnung der Elementarteilchen in Kristallen sprechen, da das Wort Elementarteilchen nur jene Teilchen bezeichnet, von denen man derzeit annimmt, daß sie nicht aus anderen Teilchen zusammengesetzt sind.

Abschließend sei noch einmal festgehalten, daß das Buch, wie der Titel sagt, ein Lehrbuch ist und als solches bestens zu empfehlen ist.

H. ZINGL, Graz

Handbuch der Physik — Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE. Band XXVI: Licht und Materie II. Mit 754 Figuren, VII 965 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. Ganzl. DM 168.–, Subskriptionspreis bei Verpflichtung zur Abnahme des ges. Handbuches DM 134.40.

Der Inhalt des Werkes umfaßt die Teilgebiete Lumineszenz von G. F. GARLICK, Hull, Temperaturstrahlung fester Körper von G. A. W. RUTGERS, Arnhem, Raman Effekt von S. MIZUSHIMA, Tokio und Infrarotspektroskopie von J. LECOMTE, Paris. Der Verfasser dieser Besprechung fühlt sich nicht berufen, über die ersten beiden Beiträge zu referieren, da diese von seinem Arbeitsgebiet zu weit abliegen.

Der Beitrag über den RAMAN-Effekt bringt zunächst eine Übersicht über die experimentellen Methoden der RAMAN-Spektroskopie. Anschließend werden Normalschwingungen von Molekülen und deren Zusammenhang mit der Symmetrie des Moleküls behandelt. Weiter folgen als theoretische Abhandlungen über das Zustandekommen des Effektes die klassische Polarisierbarkeitstheorie von PLACZEK und die Streutheorie auf quantentheoretischer Grundlage, wie sie zuerst von KRAMERS-HEISENBERG angegeben wurde. Ein weiterer Abschnitt ist den Rotations- und Rotationsschwingungs-Spektren vorbehalten. Der RAMAN-Effekt von Flüssigkeiten und festen Körpern wird, in ein Kapitel zusammengefasst, nur gestreift. Meiner Meinung nach wäre eine ausführliche Darstellung über den RAMAN-Effekt in Kristallen erwünscht, da die Verhältnisse hiefür sich grundlegend von jenen des „freien" Moleküls unterscheiden. Vielleicht hätte man dafür die Berechnung thermodynamischer Größen aus spektroskopischen Daten, als nicht unmittelbar zum Problemkreis gehörig, kürzen oder ganz weglassen können. Recht glücklich ist der Umfang des letzten Kapitels gewählt: Hier wird an Hand von einfach gebauten Molekülen die Leistungsfähigkeit der RAMAN-Spektroskopie für die Aufklärung der Molekülstruktur demonstriert.

Unverständlicherweise wurde der „Resonanz-RAMAN-Effekt" überhaupt nicht erwähnt, obwohl die ersten diesbezüglichen experimentellen und theoretischen Arbeiten bereits vor zehn Jahren erschienen. Diese Lücke muß bei einer Neuauflage unbedingt geschlossen werden!

Den Hauptteil dieses Bandes nimmt die Infrarot-Spektroskopie ein. Auch hier ist die experimentelle Technik vorangestellt. Alles Wissenswerte über Strahlungsquellen und Empfänger, Prismen und Gitterspektrographen für verschiedene Spektralbereiche, Registriereinrichtungen usw. ist in klarer und auch für den Nicht-Fachmann verständlicher Weise zusammengefaßt. Sogar eine Anzahl von Spezialkonstruktionen für besondere Problemstellungen wird angeführt. Für das praktische Arbeiten wichtige Hinweise findet man in den Kapiteln Zubehör zu den Spektrographen und Präparation der Substanzen für die Aufnahme. Unter dem Titel: Prinzipielle Bemerkungen zu den Infrarot-Spektren in Absorption und Reflexion werden die Möglichkeiten und Grenzen dieser Spektroskopie klargestellt.

Viel zu weitläufig erscheint die Aufnahme der Absorptionsspektren verschiedener organischer und anorganischer Verbindungen (etwa 500 Seiten!), die in diesem Umfang in ein Tabellenwerk gehören.

Schließlich werden noch die Anwendung der Infrarot-Spektroskopie für die chemische Analyse, die Messung der absoluten Bandenintensität und die Dispersion im Infrarotbereich behandelt.

Ein deutsch-englisches, ein englisch-deutsches sowie ein französisches Sachverzeichnis bilden den Abschluß des Bandes. J. WAGNER, Graz

Handbuch der Physik — Encyclopedia of Physics. Herausg. v. S. FLÜGGE, Band XXXVIII, 1. Teil: Äußere Eigenschaften der Atomkerne. Mit 160 Figuren, VI, 471 S., Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag, 1958. Ganzleinen DM 118.—, Subskr. Preis DM 94.40.

Der erste Artikel des eben erschienenen Bandes 38/1 des Handbuches der Physik befaßt sich mit den Nucliden und wurde von A. H. WAPSTRA verfaßt. Er zerfällt in drei Kapitel: a) Methoden der Massenbestimmung, b) atomare Massen der Nuclide, c) Verlauf der Massen der Nuclide und Diskussion. Die in Kapitel zwei zusammengestellten Tabellen der Bindungsenergien und der Massenexcesse stellen die neuesten experimentell gefundenen Ergebnisse dar und sind samt einer Korrekturtabelle dem heutigen Stand der Wissenschaft angepaßt. Im Kapitel C findet man, um aus der Vielfalt des Gebotenen nur einiges herauszugreifen, die Konstanten der BETHE-WEIZSÄCKERformel, eine Systematik des α- und β-Zerfalles Energie und vieles andere mehr. Eine vollständige Literaturübersicht beschließt diesen in jeder Hinsicht vorbildlichen Artikel.

Der zweite Artikel behandelt die Bestimmung der Atommassen mittels Mikrowellenmethoden und stammt von S. GESCHWIND. Er bringt vor allem die Massenermittlung auf Grund Rotationsspektren zweiatomiger und vielatomiger Moleküle. Neben einer Übersicht über die verschiedenen Fehlerquellen, sowie deren Ausschaltung werden die neuesten experimentellen Resultate für zweiatomige Moleküle zusammengestellt.

Daran schließt sich der dritte Artikel von F. M. KELLY über die spektroskopische Bestimmung vom Kernspin und magnetischem Moment des Kernes. Der Abschnitt a erörtert die Bestimmung des Kernspins und die Methoden der Ermittlung magnetischer Momente auf Grund der Hyperfeinstruktur. Er zerfällt in vier Teile: 1. Wechselwirkung zwischen Kern und Elektron, 2. Bestimmung des Kernspins, 3. Bestimmung des magnetischen Momentes, 4.) experimentelle Methoden.

Der Abschnitt B befaßt sich mit der Anwendung der Atomstrahlenmethode der magnetischen Resonanz zur genauen Ermittlung der Hyperfeinstruktur. Im

letzten Abschnitt C wird der Einfluß des Kernspins auf die relativen Intensitäten der Rotationslinien behandelt und die darauf begründeten Methoden der Bestimmung des Kernspins.

Der vierte Artikel von L. Wilets ist den Isotopenverschiebungen gewidmet und zeigt, wie man mit ihrer Hilfe die Ladungsverteilung der Kerne ermitteln kann. Dabei werden kugelförmige Kerne erörtert, sowie die durch Deformation der Kerne verursachten Effekte. An diesen kürzeren Bericht schließt sich eine sehr ausführliche Zusammenfassung der kernmagnetischen Hochfrequenz und Spektroskopie von G. Laukien an. Dieses verhältnismäßig junge und schon recht umfangreiche Gebiet gründet sich auf der Hypothese Paulis, da Kerne sowohl einen Spin, als auch ein magnetisches Moment besitzen. Kopfermann hat sich um diese Methode größte Verdienste erworben, die sich durch große Genauigkeit auszeichnet. Es gibt zwei Verfahren, die als Kerninduktion und Kernresonanzabsorption bekannt sind. Dieser Artikel stellt in übersichtlicher Weise alles Wissenswerte zusammen, wobei besonders auf die sehr klar gebrachten physikalischen Grundlagen hingewiesen sei, die für das Verständnis unumgänglich notwendig sind. Der Abschnitt B bringt eine Systematik aller Bruckenschaltungen sowie Oszillatorschaltungen und impulstechnische Schaltungen. Wer mit dieser Methode zu tun hat, weiß wie lange es dauert, um hier selbst einige Erfahrung zu sammeln und wie wertvoll gerade diese Hinweise sind. Erwähnenswert ist auch der Abschnitt über das Magnetfeld, da die Homogenisierung des Feldes von großer Bedeutung ist. Hier bringt der Verfasser viele induktive Schaltbilder und konstruktive Zeichnungen die eine große Hilfe für den Experimentator darstellen. Der letzte Abschnitt bringt eine Auswahl von Ergebnissen und zwar sowohl Absolut- als auch Relativmessungen. Die Struktur der Spektren von Festkörpern wird an Hand von Linienaufnahmen diskutiert und ihre Auswertung gezeigt. Ein sehr ausführlicher Kernmomentbericht beschließt diesen äußerst lesenswerten Artikel.

Der letzte Abschnitt ist den Kernquadrupolmomenten gewidmet und bringt sowohl die Bestimmungsmethoden für Atome, Moleküle als auch für Kerne.

Der vorliegende Band des Handbuches entspricht sowohl an Gehalt als auch an Ausführung den bisher erschienenen. F. Koller, Graz

Ultraschall. Grundlagen und Anwendungen in Physik, Technik, Industrie, Biologie und Medizin. Von Lieselott Herforth und H. M. Winter. Mit 65 Abbildungen im Text und Tafelanhang. VII, 236 S. (Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bibliothek: Band 15). Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1958. Geb. DM 12.—.

Das vorliegende, von den Verfassern selbst als kleines Lehrbuch des Ultraschalls bezeichnete Büchlein, schließt eine wichtige Lücke in der Literatur. Die zunehmende Bedeutung des Ultraschalls macht es notwendig, daß neben umfangreichen Monographien auch ein kurzer Überblick über die Grundlagen und Anwendungen ermöglicht wird. Dies ist die Hauptaufgabe des zu besprechenden Buches und man kann sagen, daß sie voll und ganz erfüllt wird. Neben einer sehr verständlichen und klaren Übersicht über die allgemeinen Grundlagen wird eine gute Auswahl aller praktischen Anwendungen des Ultraschalls gegeben, die das Einarbeiten in diese Spezialwissenschaft rasch und gründlich gestattet. Das Buch kann jedermann bestens empfohlen werden. F. Koller, Graz

Oszillatoren mit Schwingkristallen. Von W. Herzog. Mit 284 Abb., XI, 317 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1958. Ganzleinen DM 45.—.

Die große Bedeutung von Oszillatoren mit hoher Frequenzkonstanz für die moderne Wissenschaft und Technik ist wohl allgemein bekannt. Eine einheitliche

abgerundete Darstellung dieses außerordentlich interessanten Gebietes ist daher trotz Existenz spezieller Literatur wünschenswert. Mit dem vorliegenden Werk wird dieser Wunsch wohl voll und ganz erfüllt. Es ist dem Verfasser durchaus gelungen, was er in seinem Vorwort als Ziel andeutet, nämlich dem Theoretiker wie auch dem Praktiker etwas zu bieten.

An der Spitze steht eine kurze gedrängte Übersicht über die Eigenschaften schwingfähiger Kristalle, wobei nur das Wesentlichste im Hinblick auf die hier interessierenden Anwendungen Berücksichtigung findet. Daran schließt sich eine ausführliche theoretische Behandlung von Schwingkreisen und ihren Bestandteilen. Dem Problem der Frequenzkonstanz ist ein eigenes Kapitel gewidmet, ein weiteres, verfaßt von Doz. Dr. H. Lueg (Ulm) bringt das Nyquist-Theorem. Die zweite Hälfte des Buches spricht vor allem den Praktiker an. Zahlreiche Oszillatorschaltungen mit Elektronenröhren und mit Transistoren werden beschrieben und in ihren wesentlichen Eigenschaften untersucht. Die Möglichkeit zur Veränderung der Resonanzfrequenz und die damit zusammenhängenden Erscheinungen werden erörtert. Den Abschluß bildet eine kurze Beschreibung von Kristall- und Atomuhren.

L. Hanke, Graz

Gleichgewichts- und Wachstumsformen von Kristallen. Von B. Honigmann. (Fortschritte der physikalischen Chemie: Band IV.) Mit 79 Abb., XII, 161 S. Darmstadt: Dr. Dietrich Steinkopf-Verlag. 1958. DM 26.—.

Das in der Reihe „Fortschritte der physikalischen Chemie" erschienene Buch macht den Leser in einer zusammenfassenden Darstellung mit den Erkenntnissen über die Bildung und das Wachstum der Kristalle vertraut. Nach einer Einführung, in welcher die notwendigen Grundbegriffe kurz erläutert werden, folgen Kapitel über die Kristallzüchtung und die experimentell beobachteten Wachstumsformen, dann die Beschreibung der Methoden mit welchen es möglich ist die Gleichgewichtsformen der Kristalle zu ermitteln und das Wachstum der einzelnen Kristallflächen zu verfolgen. Die letzten 50 Seiten widmet der Verfasser der Theorie, die, obwohl sie im Vorwort ausdrücklich als eine nicht umfassende Darstellung bezeichnet wird, doch für alle ausreichend ist, die dieses Thema nicht als ihr ausgesprochenes Spezialgebiet betrachten. Der Leser wird in diesem Teil nicht nur mit den grundlegenden Anschauungen bekannt gemacht, sondern auch mit den neuesten Arbeiten wie z. B. der Berechnung der Gleichgewichtsformen in Gegenwart von Fremdatomen. Besonders wertvoll ist das umfassende Literaturverzeichnis, welches in über 200 Zitaten die bis einschließlich 1957 erschienenen einschlägigen Arbeiten umfaßt. Ich glaube, daß diese Schrift für alle, die sich mit Kristallbau, Kristallgitterfehlern oder mit Grenzflächenerscheinungen an festen Stoffen beschäftigen, sehr wertvoll ist.

H. H. Weitzer, Graz

Univalent Functions and Conformal Mapping. Von James A. Jenkins. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge: Heft 18.) Mit 6 Abb., VIII, 169 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. Steif geh. DM 34.—.

Zum zentralen Thema hat diese Monographie das allgemeine Koeffiziententheorem in seiner Anwendung auf schlichte Funktionen und Familien von solchen. Ausgehend von den Methoden von Prawitz und Löwner über schlichte konforme Abbildung des Einheitskreises wird dann die Extremalenmethode neben allgemeineren Methoden der Variationsrechnung in ihrer besonderen Eignung für die Anwendung auf solche Probleme besprochen, wie sie hauptsächlich durch die Arbeiten von Grötzsch über die Verzerrung bei schlichten konformen Abbildungen und das Parallelschlitztheorem in den Jahren 1928 bis 1934 gefördert wurde.

Zum Teil liegen diese Untersuchungen auch schon früheren Arbeiten von KOEBE und anderen zugrunde, während nachher besonders TEICHMÜLLER, auf GRÖTZSCH aufbauend, über das Koeffizientenproblem in Verbindung mit quadratischen Differentialen beachtenswerte Fortschritte erzielte. Hier dürfen schließlich die zahlreichen Arbeiten des Verfassers selbst aus dem letzten Jahrzehnt nicht übersehen werden. Die Darstellung umfaßt naturgemäß viele Untersuchungen und Ergebnisse auf dem Gebiete, wie etwa Dreipolsatz, Durchmessersätze, unendlich zusammenhängende Bereiche. Als Anwendung des allgemeinen Koeffiziententheorems ergeben sich weiterhin viele klassische und neuere Einzelresultate für schlichte Funktionen. Das Schlußkapitel bringt noch die in manchen Fällen, wo der allgemeine Koeffizientensatz versagt, anwendbare Methode der Symmetrisierung, welche auch gewisse Verallgemeinerungen auf mehrfach überdeckende Funktionen gestattet. Es ist verständlich, wenn bei dieser Fülle des Stoffes gewisse Nebenzweige, wie etwa die quasikonforme Abbildung, nur am Rande behandelt werden.

A. AIGNER, Graz

Lehrbuch der Luftelektrizität. Von ERICH VON KILINSKI. Mit 68 Abb., VII, 141 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1958. DM 17.—.

Die derzeit geradezu stürmische Entwicklung in der Erforschung der äußeren Atmosphärenschichten hat die Probleme der Luftelektrizität stark in den Hintergrund treten lassen, ganz zu Unrecht allerdings, wie man bei der Lektüre dieses Buches erkennen muß. Denn zahlreiche Fragen harren auch heute noch ihrer Lösung. So ist es unzweifelhaft ein Verdienst des Verfassers, in Form eines Lehrbuches die Theorie und Praxis luftelektrischer Messungen der jungen Studentengeneration näherzubringen und damit diesem Forschungszweig neue Freunde zu gewinnen. Der straff zusammengefaßte Inhalt gliedert sich in vier Teile, denen ein umfangreiches Schrifttumsverzeichnis angeschlossen ist, das vor allem die neuere Literatur eingehend berücksichtigt. Den weitaus größten Raum beansprucht der erste Abschnitt mit dem Titel „Die Leitfähigkeit der Atmosphäre und die Ionen", der neben der Besprechung der grundlegenden Gesetze von OHM, COULOMB und RIECKE mit der Methodik der luftelektrischen Messungen und ihren Schwierigkeiten bekannt macht und darüber hinaus auch über die Ergebnisse der Leitfähigkeitsmessungen, Kernzählungen u. dgl. berichtet, wobei allerdings fast ausschließlich auf frühere derartige Zusammenstellungen anderer Autoren zurückgegriffen wird. Ein bißchen allzu knapp geraten erscheint dem Referenten das letzte Kapitel dieses Abschnittes, das die theoretischen Betrachtungen zur Ionenerzeugung und Ionenvernichtung zum Inhalt hat. Möglicherweise hätte freilich eine ausführlichere Darstellung den Rahmen eines Lehrbuches überschritten.

Einen ähnlichen Aufbau zeigt auch der Abschnitt B („Das luftelektrische Feld"), in dem neben der Erläuterung der Meßmethoden und der üblicherweise verwendeten Apparate die Beobachtungsergebnisse über das Verhalten des Potentialgefälles mitgeteilt werden. Täglicher und jährlicher Gang sowie verschiedene Einflüsse auf diesen (zum Beispiel meteorologischer Natur) werden ausführlich behandelt, lassen aber auch die Lücken in unserem Wissen über diese Erscheinungen klar zu Tage treten.

„Die in der Atmosphäre fließenden Ströme" ist der Titel des dritten Abschnittes, der vorwiegend der einst so rätselhaft erschienenen Aufrechterhaltung der negativen Erdladung gewidmet ist.

Der letzte Abschnitt schließlich rundet das Bild vom luftelektrischen Geschehen in der Erdatmosphäre ab mit einer Besprechung der Wolken- und Gewitterelektrizität, wobei unter anderem die vergeblichen Versuche, die Entstehung der Wolkenladungen zu erklären, ausführlich dargestellt werden. Kleine Druckfehler in den

Formeln (84) und (85) könnten vielleicht bei einer späteren Auflage berichtigt werden.

O. Burkard, Graz

Einführung in die Physik der magnetischen Werkstoffe. Von K. M. Koch. Unter Mitarbeit von W. Jellinghaus. (Einführung in die Physik der elektrotechnischen Werkstoffe: III. Teil.) Mit 176 Abb. i. T. und 7 Tab. i. Anhang, VII, 208 S. Wien: Verlag Franz Deuticke, 1957. Geb. S 186.—.

In der Zeit der zunehmenden Spezialisierung der einzelnen Wissensgebiete fällt es dem in der Praxis Stehenden immer schwerer, den für seine Tätigkeit notwendigen Überblick über den neuesten Stand aller einschlägigen Gebiete zu behalten. Dies gilt besonders auch für die magnetischen Werkstoffe und es ist dem Verfasser zu danken, daß er sich der Arbeit unterzogen hat, zunächst auf diesem Gebiete mit seinem Buch eine bestehende Lücke auszufüllen.

In kurzer, aber gründlicher und vor allem klarer und übersichtlicher Darstellung ist hier ein Buch entstanden, in dem die Grundlagen und heutigen Theorien des Magnetismus und Ferromagnetismus, die Probleme der realen Magnetisierungskurve, die magnetischen Werkstoffe und die Messung magnetischer Größen so besprochen werden, daß sich auch ein diesem Gebiete etwas ferner Stehender gut orientieren und einarbeiten kann und — wenn es nötig sein sollte — an Hand der angeführten Literaturen den Weg zu spezielleren Einzelheiten findet.

Besonders der Techniker, sei er nun Physiker oder Chemiker, wird dieses Buch gerne in die Hand nehmen, aber auch der Student wird darinnen viel Nützliches finden.

Es ist hier in der Tat gelungen, das gesetzte Ziel zu erreichen, nämlich eine Brücke zu schlagen zwischen reiner Grundlagenforschung und technischer Praxis und man kann schon auf die weiteren Bücher der Reihe „Einführung in die Physik der elektrotechnischen Werkstoffe", von denen das vorliegende Buch als erstes erschienen ist, gespannt sein.

K. Torkar, Graz

Behind the Sputniks. A Survey of Soviet Space Sciences. By F. J. Krieger. Mit 45 Abb., VI, 380 S. Washington: Public Affairs Press. 1958.

Dieses Buch, das F. J. Krieger in seiner Eigenschaft als Mitarbeiter der bekannten "RAND Corporation" vor allem für amerikanische Leserkreise geschrieben hat, fußt im wesentlichen auf Übersetzungen russischer Publikationen und wissenschaftlicher Arbeiten, die zwar offen erschienen, aber doch nur schwer der Weltöffentlichkeit zugänglich sind. Der letztere Umstand mag daher auch für das überraschte Staunen verantwortlich zu machen sein, das den Leser hinsichtlich des Umfanges, der Tiefe und der Zielstrebigkeit der russischen astronautischen Forschungen befällt, zumal man vor dem Start des ersten Sputnik vor allem im Westen vielfach dazu neigte, die russischen Bemühungen um die Weltraumfahrt mit einem Lächeln abzutun.

Durch entsprechende Zusammenfassung von Veröffentlichungen zahlreicher russischer Wissenschaftler und Techniker bietet Krieger ein geschlossenes Bild der allmählichen Entwicklung und der allgemeinen Probleme der Astronautik, wie sie von russischen Forschern zur Darstellung gelangten; ein weiteres Kapitel befaßt sich mit biologischen Fragen, mit dem Ablauf der Lebensvorgänge im schwerelosen Raum und während eines hochbeschleunigten Raketenfluges. Auch dem Flug zum und um den Mond sind mehrere Übersetzungen russischer Autoren gewidmet, sowie weiters Arbeiten über die Steuerung und über den Antrieb von Raketen und interkontinentalen Geschossen. Naturgemäß am umfangreichsten fiel das Kapitel über die künstlichen Satelliten aus, wobei die rein wissenschaftlichen Forschungen stark in den Vordergrund gerückt erscheinen.

Ein mehr als 300 Zitate umfassendes Literaturverzeichnis vervollständigt diese für jeden an der modernen Weltraumfahrt Interessierten wertvolle Zusammenstellung von Übersetzungen russischer Autoren. O. Burkard, Graz

Physics of Nuclear Fission. Supplement No. 1 of the Soviet Journal Atomnaya Energiya. Übersetzt aus dem Russischen von J. E. S. Bradley. Herausgegeben von E. Bretscher und Donald J. Hughes. International Series of Monographs on Nuclear Energy, Division II, Vol. 2. Mit zahlr. Textabb., VI, 182 S. London-New York-Paris-Los Angeles: Pergamon Press. 1958. Geb. s. 60.—.

Die Anwendung von Kernspaltungen z. B. zur Energiegewinnung in Reaktoren ist heute für viele Techniker und Physiker ein bereits bekanntes Wissensgebiet. Die Theorie hierfür ist in einigen ausgezeichneten Werken enthalten.

Oft taucht aber die Frage auf, unter welchen Bedingungen gewisse Stoffe spaltbar sind. Die Beantwortung dieser Frage gelang bisher nur an Hand kernphysikalischer Nachschlagwerke. Nun aber hat der Verlag Pergamon Press in seiner Serie Nuclear Energy, II Division Nuclear Physics als zweiten Band eine von J. E. S. Bradley durchgeführte Übersetzung des sowjetischen Journals Atomnaya Energiya, Supplement Nr. 1, unter dem Titel Physics of Nuclear Fission herausgebracht, der die erwähnte Frage beantwortet, ohne wesentliche Vorkenntnisse auf dem Gebiete der Kernphysik oder theoretischen Physik vorauszusetzen. Das Büchlein zeichnet sich, wie die anderen dieser Reihe, wieder durch große Übersichtlichkeit und viele anschauliche Kurven und Tabellen aus, obwohl es aus 12 Artikeln von 13 Verfassern zusammengesetzt ist.

Zum Abschluß sei noch kurz der Inhalt der einzelnen Kapiteln angegeben: Überblick über die Kernspaltung und die hiefür notwendigen Bedingungen (Spaltwahrscheinlichkeit bei kleinen und großen Energien), Spaltquerschnitte für schnelle Neutronen, Ladungs- und Massenverteilung der Spaltstücke, asymmetrische Spaltung, Anisotropie der ausgesandten Spaltstücke, Spaltungsneutronen, Spaltung bei niedrig- und hochangeregten Kernen und Erforschung der Bruchstücke, wenn diese zu dritt oder mehr auftreten, Spaltquerschnitt des Urans für hochenergetische Protonen, spontane Spaltung und Spaltung durch Photonen.

Dieser Querschnitt durch den Inhalt zeigt bereits klar, die Verwendungsmöglichkeiten dieses Buches auf. Es ist ein Nachschlagswerk für den Forscher, Reaktorphysiker und vor allem für den Reaktoringenieur, ist aber auch für das Studium dieses Stoffes bestens geeignet. H. Zingl, Graz

Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen. Von R. Sauer. Zweite, erweiterte Auflage. [Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 62.] Mit 68 Abb., XVI, 284 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. DM 38.—, Ganzl. DM 41.—.

Die vorliegende zweite erweiterte Auflage des bereits besprochenen bekannten Werkes von R. Sauer, zeigt gegenüber der ersten Auflage eine Reihe von Verbesserungen und Berichtigungen. So wurde ein Absatz über Differentialgleichungen von gemischtem Typus hinzugefügt, ferner ein Kapitel über die Distributionsmethode von Schwartz; letztere wurde schon vor einer Reihe von Jahren in der Feldphysik verwendet und stellt eine jener Methoden dar, welche es gestatten, den Schwierigkeiten der Diracschen Deltafunktion an den Leib zu rücken. Man sieht, daß diese Methode eine allgemeine Bedeutung hat und dauernden Wert besitzt. Wie schon bei der Besprechung der ersten Auflage, soll auch die zweite Auflage allen Studierenden wärmstens empfohlen werden. P. Urban, Graz

Physikalische Abhandlungen aus der Sowjetunion. Band 12: Theorie der Felder und Elementarteilchen Folge 1. 126 S., Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K.-G. 1958. Kart. DM 18.—.

Das vorliegende Heft 1 des Bandes 12 der physikalischen Abhandlungen aus der Sowjetunion enthält mehrere Artikel über die Theorie der Felder und Elementarteilchen. Es sei besonders die Arbeit von Bogoljubow und Schirkow über das Lee-Modell der Quantenelektrodynamik hingewiesen, in welcher die Frage der Renormierung der Kopplungskonstanten näher untersucht wird. Die dabei auftretenden negativen Wahrscheinlichkeiten führen zu Schwierigkeiten,die diskutiert werden. Auch die Arbeit von Fainberg über nichtlineare Gleichungen der Quantenfeldtheorie ist nicht uninteressant, da sie die Gleichungen von Low aus den allgemeinen Beziehungen für die Greenschen Funktionen von Lehmann, Simanzyk und Zimmermann ableitet.

Es ließen sich beliebig interessante Einzelheiten aus den weiteren Artikeln der sowjetrussischen Physiker anführen, die alle dem heutigen Stand entsprechen und das Interesse der Physikerschaft erwecken können. P. Urban, Graz

Physikalische Abhandlungen aus der Sowjetunion. Band 13: Tieftemperaturphysik. Folge 1. Herausgegeben von der Physikalischen Gesellschaft in der Deutschen Demokratischen Republik. Redaktion der deutschen Übersetzung L. Bewilogua. Mit 40 Abb., S. 118. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K.-G. 1958. Geb. DM 18.—.

Die vorliegende erste Folge über Fragen der Tieftemperaturphysik beschäftigt sich ausschließlich mit theoretischen und experimentellen Untersuchungen zur Supraleitfähigkeit. Das Bändchen gibt einen guten Eindruck davon, wie auf diesem Gebiet Hand in Hand mit der fortschreitenden Entwicklung der Kältetechnik in Wechselwirkung zwischen Theorie und Experiment überaus schöne Fortschritte erzielt werden. Unter den theoretischen Arbeiten fällt besonders ein Versuch auf, der einer neuen Theorie der Supraleitfähigkeit gewidmet ist, durch die man in die Lage versetzt wird, verschiedene Mängel der alten phänomenologischen Theorie zu beseitigen. Es werden einige Effekte angegeben, die der Messung zugänglich sind, und man kann auf diesbezügliche Ergebnisse sehr gespannt sein. Gesteigertes Interesse dürften auch die theoretischen Untersuchungen über den Skinwiderstand im Fall der Supraleitfähigkeit finden, über dessen Anisotropie bei Zinn auch einige kurze experimentelle Bemerkungen vorliegen. Den Abschluß bilden Untersuchungen über die Kristallstruktur des Wismut-Rhodiumsystems bei tiefen Temperaturen.

Man darf interessiert weitere Folgen dieser Reihe abwarten, deren Vorteil es ist, die entsprechenden Arbeiten eines Fachgebietes dem darin arbeitenden Leser in geschlossener Form zugänglich zu machen. Am Rande sei auch eine Zunahme der Papierqualität im Vergleich zu früheren Heften vermerkt. N. Pucker, Graz

Quantentheorie des Atoms. Herausgegeben von A. Rubinowicz. Übersetzung nach der 2. polnischen Auflage des Werkes Kwantowa Teoria Atomu 1959. Mit 38 Fig., VII, 486 S. Leipzig: Johann Ambrosius Barth. 1959. Geb. DM 31.80.

Das vorliegende Lehrbuch der Quantentheorie von A. Rubinowicz stellt eine Übersetzung seiner langjährigen polnischen Vorlesungen dar und zeigt in jeder Hinsicht den erfahrenen Lehrer und Kenner. An Hand von historischen Tatsachen erlebt der Leser die Entwicklung der älteren Quantentheorie in ihrem berühmten Wechselspiel zwischen Experiment und Theorie. Die Darstellung zeigt die hohe Schule Sommerfelds und Bohrs, aus welcher der Verfasser hervorgegangen ist. Interessant ist, daß trotz der vielen Lehrbücher auf diesem Gebiete ein Verfasser wie Rubinowicz es versteht, immer wieder neue Gesichtspunkte herauszuarbeiten, die reizvoll und belehrend für jedermann sind. Eine sorgfältig ausgewählte Sammlung von Aufgaben gestattet den jüngeren Semestern ihre Kenntnisse zu überprüfen und sich mit der Methodik vertraut zu machen. Eine zentrale Stellung

nimmt in der Darstellung von RUBINOWICZ die Polynommethode von SOMMERFELD ein, die er in ihrer allgemeinsten Fassung bringt und die Verwendung der RIEMANNschen P-Funktion, die er mit allen ihren funktionentheoretischen Eigenschaften sehr klar und übersichtlich behandelt. Das Werk wird bestimmt nicht nur allein vielen Studierenden, sondern auch Kollegen eine wertvolle Ergänzung zur bisherigen Literatur bilden. P. URBAN, Graz

Relaxation Spectrometry. Von E. G. RICHARDSON. Mit 88 Textabb., 140 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1957.

Das Buch ist eine Einführung. Es trägt dem zunehmenden Interesse an molekularen Festkörpereigenschaften Rechnung, die sich unter den Schlagworten „E-Modul" und „innere Reibung" zusammenfassen lassen.

Beschrieben werden Methoden zur Messung von Deformationen und deren Fortpflanzung in Festkörpern. Das ist ein Problem der Akustik. Die wesentliche Aufgabe ist, für ein möglichst breites Frequenzband jene Frequenzen zu bestimmen, für die die inneren Energieverluste extrem werden. Damit ist praktisch schon ausgesprochen, daß die modernsten Hilfsmittel der Akustik, die Technik und Physik zur Verfügung stellen, Verwendung finden. Auf Relaxationserscheinungen in Dielektrikas wird am Ende des Buches, eigentlich nur der Vollständigkeit halber, kurz eingegangen.

Dem Charakter einer Einführung entspricht auch die Tatsache, daß sich das Buch im wesentlichen auf experimentelle Methoden und Ergebnisse beschränkt, theoretische Untersuchungen nur soweit anstellt, wie sie als Grundlagen für die Messungen benötigt werden. Meßanordnungen sind immer durch Skizzen erläutert, die Meßergebnisse meist graphisch dargestellt, seltener durch Tabellen.

Den einzelnen Kapiteln sind umfangreiche Literaturverzeichnisse beigegeben, die dem, der sich in das Gebiet einarbeiten will, viel mühsames Suchen ersparen werden. H. NEUER, Graz

Il teorema di Riemann-Roch per curve, superficie e varietà; questioni collegate. Von F. SEVERI. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge: Heft 17.) VIII, 131 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. DM 23.60.

Es ist sehr befriedigend, von einem Pionier der italienischen Schule in der algebraischen Geometrie selbst eine solche Monographie über den Problemkreis geschrieben zu sehen, der sich um den Satz von RIEMANN-ROCH über die Anzahl der willkürlichen Konstanten in algebraischen Funktionen gruppiert. Dabei treten in historischer Darstellung die großen Schwierigkeiten der Verallgemeinerung dieses Satzes zutage, deren restlose Meisterung bis heute nicht gelungen ist. Immerhin sind die erzielten Teilresultate schon beachtlich und für die weitere Forschung richtungsweisend. Es handelt sich besonders um Verallgemeinerungen von algebraischen Kurven auf Mannigfaltigkeiten höherer Dimension, wozu der Verfasser selbst bahnbrechende Arbeit leistete. Dabei wird nicht nur lineare, sondern auch rationale und algebraische Äquivalenz behandelt. Es wird ferner um klare Begriffsbildungen gerungen, wobei auch Auseinandersetzungen mit zwar schon eingebürgerten, aber wenig glücklichen Bezeichnungen nicht fehlen. In dankenswerter Weise wird besonders die umfangreiche italienische Literatur über dieses Gebiet berücksichtigt und dem Leser erschlossen. Am Beginn eines jeden der 6 Paragraphen findet sich eine kurze zusammenfassende Übersicht in englischer Sprache. A. AIGNER, Graz

STENZEL/BROSZE: **Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen.** Zweite neubearbeitete Auflage. Von O. BROSZE. Mit 149 Textabb., IV, 168 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. Geb. DM 31.50.

Das vorliegende Werk kann als Übungsbuch der Akustik bezeichnet werden, das durch eine rigorose Beschränkung auf bestimmte Probleme trotz geringen Umfanges sehr in das Detail gehen konnte. Die Fragestellungen wurden bis zum numerischen Endresultat gelöst und in zahlreichen Abbildungen veranschaulicht. Das Werk bekommt dadurch für den Benützer jene Vorzüge, die durchgeführte Seminaraufgaben der theoretischen Physik in sich tragen.

Es wird das Fernfeld von Strahlern und Strahlergruppen mit Einführung der Begriffe Richtfaktor und Strahlungsfaktor behandelt. Das schwierige Problem des Nahfeldes wird für die Sonderfälle zweier Einzelstrahler und die rechteckige sowie kreisförmige Kolbenmembran gelöst. Der letzte Abschnitt befaßt sich mit dem Schallfeld von Kugelstrahlern und mit dem Beugungsfeld von starren Kugeln und Zylindern. Eine allgemeine Einleitung in die Grundlagen der Akustik im Umfange weniger Seiten hätte den Wert des Buches noch erhöht, umso mehr als nicht allen Lesern die Zitate von RAYLEIGHS Theory of Sound zur Verfügung stehen werden.

L. BREITENHUBER, Graz

Torsionstheorie. Von C. WEBER und W. GÜNTHER. Mit 160 Textabb., VII, 316 S. Braunschweig: Vieweg u. Sohn. 1958. Geb. DM 38.—.

Die Torsionstheorie, die ja bekanntlich ein Teilgebiet der Elastizitätstheorie darstellt, wurde in den letzten Jahren immer wieder durch neue Methoden ergänzt und vervollständigt. Da die letzteren in modifizierter Form oft auch bei der Behandlung anderer Probleme der Physik Bedeutung besitzen, unternehmen es die Verfasser des vorliegenden Buches eine Übersicht über die neueren Untersuchungen in leicht verständlicher Form zu geben. Das Werk richtet sich nun in erster Linie an Techniker, kann aber auch dem Experimentalphysiker gute Dienste leisten. Die Art der Darstellung zeigt die Erfahrung des Pädagogen und er versteht es in kurzen Zügen ein Problem zu umreissen und seine Lösung aufzuzeigen. Eine Abgrenzung der bisher bekannten Verfahren führt zwangsläufig zu einer Erweiterung unter Entwicklung neuerer Verfahren. Das Buch stellt im wesentlichen, unter anderem eine vom ersten Verfasser stammende Spiegelungsmethode eingehend dar, auf Grund welcher Querschnitte die durch Kreise, Kreisbögen und gerade Linien begrenzt sind, behandelt werden können. Außerdem wird die Eingrenzung des Flächentorsionsmomentes und der Spannungen zwischen eine obere und untere Schranke vorgebracht die beliebig nahe aneinanderrücken können. Zwischenrechnungen wurden meistens weggelassen, soweit sie elementare Umformungen betragen.

Das Buch wendet sich vor allen an gewandte Mathematiker und Physiker, die sich mit mathematisch-physikalischen Problemen befassen, wird aber auch für theoretisch interessierte Ingenieure von Bedeutung sein. Es kann diesem Leserkreis sehr empfohlen werden.

P. URBAN, Graz

Lehrbuch der theoretischen Physik. Von W. WEIZEL. Zweite verbesserte Auflage. II. Band: Struktur der Materie. Mit 268 Abb., XV, 989 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. Ganzleinen DM 88.—.

Hiermit liegt die 2. Auflage des 1950 zum erstenmal erschienenen Werkes vor. Das Gerippe ist im wesentlichen unverändert geblieben. Gewisse Änderungen waren naturgemäß in jenen Teilgebieten notwendig, die sich gegenwärtig besonders schnell weiterentwickeln. So wurde ein neuer Abschnitt „Feldtheorie der Materie" eingefügt und die Behandlung der Kernphysik erweitert. Die elektrischen Gasentladungen wurden mit neuen Beiträgen über Teilchenbeschleuniger, Elektronenoptik und das Verhalten von Ladungsträgern an festen Oberflächen in einem Abschnitt „Elektronik" zusammengefaßt. Ein leider etwas kurz ausgefallenes Kapitel

über Halbleiter ist in dem Abschnitt über die zusammenhängende Materie zu finden.

L. HANKE, Graz

Year Book of the Physical Society 1957. Mit zahlreichen Textabb., VI, 132 S. London: The Physical Society. 1957. 12s. 6 d.

Das Jahrbuch der Physikalischen Gesellschaft 1957 enthält einige sehr interessante Berichte aus der Feder berühmter englischer Physiker. So berichtet vor allem der Präsident der englischen Physikalischen Gesellschaft N. F. MOTT über die Physik und Chemie der Metalle. Er gibt eine Diskussion über den Beitrag der technischen Physik zum Verständnis der Bändertheorie der Metalle. Darin zeigt er, wie durch Messungen des Diamagnetismus und der Leitfähigkeit bei hohen Frequenzen und tiefen Temperaturen die Form der Fermischen Fläche experimentell bestimmt wird. Diese zeigt die Abhängigkeit der elektronischen Wellenfunktion von der Richtung. Auch die Wirkung der Bindungskräfte auf die mechanischen Eigenschaften der Metalle wird erörtert. An Hand von schönen elektronenmikroskopischen Aufnahmen von HIRSCH und Kollegen werden seine Betrachtungen besonders augenfällig.

Die anderen Beiträge des Jahrbuches befassen sich mit astronomischen bzw. astrophysikalischen Problemen, Beugungstheorie, magnetische Eigenschaften bei tiefen Temperaturen und anderes mehr. Hier sei noch besonders ein schöner Überblick über die Forschung auf dem Gebiet der Elementarteilchen von G. D. ROCHESTER und C. C. BUTLER erwähnt. Den Abschluß bildet ein Überblick über das geophysikalische Jahr von H. S. JONES, Betrachtungen über das flüssige Helium von E. MENDOZA und neuere Untersuchungen aus der Akustik von E. G. RICHARDSON.

P. URBAN, Graz

Theorie der Limitierungsverfahren. Von K. ZELLER. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge: Heft 15.) VIII, 242 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. DM 36.80.

Wie alt auch das Problem der Limitierung divergenter Folgen und Reihen ist, deren Anfänge schon auf LEIBNIZ und EULER zurückgehen, so beginnt ihre systematische und moderne Untersuchung doch erst mit der polnischen Schule (BANACH, MAZUR, ORLICZ) um 1930, die ausführlichere Darstellung gar erst 1955. So kann das vorliegende Buch als Einführung und Wegweiser in dieses mannigfache Gebiet als sehr willkommen gelten. Es gliedert sich sehr systematisch in 8 Kapitel mit je 10 Nummern. Es widmet sich in der Hauptsache der Theorie der Matrixverfahren und behandelt Nichtmatrixverfahren nur zweitlinig, sowie auch Anwendungen der Limitierung nur am Rande. Als Elemente der Folgen und Reihen treten beliebige komplexe Zahlen auf. Das Kernstück der Theorie bildet die Untersuchung der Wirkfelder, das ist die Charakterisierung der Gesamtheit der MOORE-SMITH-Folgen, welche durch das betreffende Verfahren limitiert werden. Dazu sind vorbereitend die funktionalanalytischen Hilfsmittel dargestellt, wie sie sich in der Einführung von linearen topologischen Räumen bewähren. Sodann sind direkte Sätze, welche aus Eigenschaften der Urbilder der Transformation auf solche der Bilder schließen, zusammengestellt und getrennt von ihnen Umkehrsätze, welche in umgekehrter Richtung folgern. In den drei Schlußkapiteln wird eine Fülle einzelner Verfahren besonders besprochen. — Das 64 Seiten lange Literaturverzeichnis ist nach Jahrgängen geordnet und reicht von 1880 bis 1955. Es ist in Aussicht gestellt, dieses bei Gelegenheit in der „Mathematischen Zeitschrift" noch weiter zu ergänzen.

A. AIGNER, Graz

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5. — Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Paul Urban, Graz, Institut für Theoretische Physik der Universität. — Druck: Berger & Schwarz, Zwettl, N.-Ö.

Fortsetzung von der II. Umschlagseite

Abbildungen: Sie müssen, wenn auch nur skizziert, doch so weit ausgeführt sein, daß für den dem Thema fernstehenden Verlagszeichner keine Unklarheiten bestehen. Jede Zeichnung ist zu beschriften; die Beschriftung soll das Lesen der Zeichnung auch ohne langes Suchen im Text ermöglichen. Sie ist, als Beschriftung der Abb. Nr.... kenntlich gemacht, an der gewünschten Stelle des Textes einzufügen. Die Zeichenvorlage ist der Abhandlung auf gesondertem Blatt, das zwecks Vermeidung von lästigen Verwechslungen durch Autorennamen und Arbeitstitel gekennzeichnet sein soll, beizulegen. Man vergesse nicht, daß Figurenwiedergabe und Textherstellung zwei gesonderte Arbeitsgänge sind, die erst nach der ersten Korrektur zusammenlaufen.

Formeln: Der Setzer versteht im allgemeinen nichts vom Sinn der Formeln und hält sich genau an die Vorlage. Korrekturen an gesetzten Formeln bedingen einen unverhältnismäßig großen Aufwand an Mehrarbeit. Unverhältnismäßig in bezug auf die geringe Mehrarbeit, die der Verfasser hat, wenn er Buchstaben und Formelzeichen deutlich und unmißverständlich schreibt, bzw. malt. — Die Formelzeichen sollen womöglich den AEF-Normen entsprechen oder den in den beiden Handbüchern der Physik verwendeten Zeichen angeglichen sein. — Längere mathematische Ableitungen sollen gegebenenfalls in einem mathematischen Anhang zusammengestellt werden; soweit gekürzt, daß der Fachmann den Rechengang übersehen und eventuell kontrollieren kann. Im Text ist raumsparende Schreibweise anzuwenden, also $(a + b)/c$ statt $\frac{a+b}{c}$ oder $e^{-E/kT}$ statt $e^{-\frac{E}{kT}}$.

Zitate ebenso wie Anmerkungen werden als Fußnoten mit durch die Arbeit fortlaufender Numerierung (zur Erleichterung der Rückverweisung, bzw. zur Vermeidung unnötiger Wiederholungen) gebracht. Als Zitatmuster (vergleiche die Handbücher oder die S.-B. der Akademie): A. J. DEMPSTER, Nature 136, 180 (1935).

Autorenkorrekturen, das heißt nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10% der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Herausgeber, Schriftleitung und Verlag

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschien:

Qualitative Chemische Analyse. Von Dr. **C. J. van Nieuwenburg,** Professor an der Technischen Hochschule in Delft und Ing. **J. W. L. van Ligten,** Dozent an der Technischen Hochschule in Delft. Deutsche, nach der vierten holländischen Auflage besorgte Ausgabe. Mit 4 Textabbildungen. IX, 295 Seiten. Gr.-8°. 1959.

Ganzleinen flexibel S 192.—, DM 32.—, sfr. 32.80, $ 7.60

Dieses Buch verdankt seine weite Verbreitung und Beliebtheit vor allem dem Umstand, daß die Verfasser Alterprobtes und Bewährtes mit einer kritischen und niemals einseitigen Darstellung moderner Verfahren und Ideen verbinden. Die zahlreichen, heute bekannten Identitätsreaktionen, die sich aus der Technik der Tüpfelreaktionen und Kristallfällungen entwickelt haben, sind so empfindlich, daß man von selbst zu einem *Mikro-* oder eventuell *Semimikrostil* gelangt, der nicht nur schnellere und bessere Resultate erzielt, sondern vor allem auch weitaus eleganter ist, was gerade für den propädeutischen chemischen Unterricht von größter Bedeutung ist. Es sind daher die Tüpfelreaktionen und die mikroskopischen Reaktionen gleich ausführlich behandelt und es wurden — so weit als möglich — für jedes Ion sowohl eine oder mehrere Tüpfelreaktionen als auch eine oder mehrere mikroskopische Reaktionen empfohlen. Die beschriebenen Methoden sind von den Verfassern seit Jahren im Laboratorium der Technischen Hochschule in Delft erprobt worden, zahlreiche junge Studenten haben sie mit Erfolg angewandt.

Relativ eingehend beschäftigen sich die Verfasser mit den seltener vorkommenden Elementen, deren weitgehende Vernachlässigung in der bisherigen Literatur sachlich nicht gerechtfertigt ist, da sie sowohl durch ihre geochemische Häufigkeit als auch durch ihre zunehmende industrielle Verwendung Bedeutung haben.

Das Buch, in dem die langjährigen praktischen Erfahrungen der Verfasser ihren Niederschlag gefunden haben, stellt somit nicht nur eine verläßliche Arbeitsunterlage für den Chemiestudenten an Hochschulen dar, sondern wird auch in Untersuchungslaboratorien mit Erfolg zu Rate gezogen werden.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Technische Elektrodynamik

Von

Dr.-Ing. Dipl.-Ing. **Franz Ollendorff**

Member I.E.E., Member A.I.E.E., Senior Member I.R.E., Research-Professor der Elektrotechnik an der Hebräischen Technischen Hochschule Haifa, Mitglied des wissenschaftlichen Forschungsrates für Israel.

Band I: **Berechnung magnetischer Felder.** Mit 287 Textabbildungen. X, 432 Seiten. Gr.-8°. 1952.
Ganzleinen S 396.—, DM 66.—, sfr. 67.50, $ 15.70

Band II: **Innere Elektronik.**

Erster Teil: **Elektronik des Einzelelektrons.** Mit 313 Textabbildungen. XII, 643 Seiten. Gr.-8°. 1955.
Ganzleinen S 582.—, DM 97.—, sfr. 99.30, $ 23.10

Zweiter Teil: **Elektronik freier Raumladungen.** Mit 240 Textabbildungen. XII, 620 Seiten. Gr.-8°. 1957.
Ganzleinen S 588.—, DM 98.—, sfr. 100.30, $ 23.35

Während der erste Band der „Inneren Elektronik" jene Vorgänge behandelt, die durch die fiktive Annahme eines in eingeprägten Feldern laufenden Einzelelektrons erfaßt werden können, beschäftigt sich der vorliegende zweite Band mit der Physik des realen Elektronenkollektivs und deren Anwendung in der „Röhrenelektronik" von der einfachen Diode bis zum Magnetron. Bei dieser Betrachtungsweise treten an die Stelle des von außen aufgezwungenen elektrodynamischen Feldes **Raumladungsfelder,** in denen mechanische und elektromagnetische Vorgänge unlösbar miteinander verkoppelt sind. Die klassische Methode der Untersuchung von Raumladungsfeldern faßt die Elektronengesamtheit als kontinuierlich verteilte Materie auf, deren Strömung mittels der Begriffe der Feldtheorie und der Hydrodynamik beschrieben wird.

. . . „The treatment is mathematical throughout. Every definition is immediately given quantitatively, and the whole argument is carried out in the form of mathematically formulated questions and answers. The work is very impressive, one might almost say monumental. The presentation is clear and concise, and, with certain exceptions, the mathematics is sufficiently elementary to be followed by a good engineering student. The treatment and presentation are very systematic and original" . . . *Journal of the Institution of Electrical Engineers*

In Vorbereitung befinden sich folgende Bände:

Band II:

Dritter Teil: **Statistische Elektronik.**

Vierter Teil: **Kristallelektronik.**

Band III: **Ionik.**